Coperta: arh. O. MAGHERAN

GH. VRĂNCEANU • C. TELEMAN

GEOMETRIE EUCLIDIANĂ GEOMETRII NEEUCLIDIENE TEORIA RELATIVITĂȚII

EDIȚIA A II-A



EDITURA TEHNICĂ
BUCUREȘTI – 1967

PREFAȚĂ LA EDIȚIA A II-A

În această ediție s-au introdus unele modificări și adăugiri menite să îmbunătățească textul.

Astfel în primele două capitole s-a introdus demonstrația dată de Euler pentru teorema lui Fermat în cazul $n = 4$, precum și unele probleme ce au făcut obiectul unor cercetări ale matematicienilor români D. Pompeiu și Dan Barbilian.

In capitolul III s-au adăugat sub formă de teoreme proprietățile mai importante ale dreptelor și planelor perpendiculare din spațiul obișnuit și au fost modificate unele demonstrații legate de noțiunea de perpendicularitate.

La capitolul IV s-au adăugat paragrafe noi, privind clasificarea ecuațiilor gravitaționale.

În noua sa formă, cartea se adresează unor cercuri largi de cititori, dornici a-și desăvîrși cultura matematică și în special cunoștințele legate de spațiul în care trăim.

AUTORII

PREFAȚĂ LA EDIȚIA

Cartea de față prezintă noțiunile de bază din domeniul geometriei euclidiene și cel al geometriilor neeuclidiene precum și aplicațiile lor în cadrul uneia dintre cele mai cuprinzătoare concepții fizice despre universul în care trăim, anume teoria relativității.

In expunerea problemelor majore, cît și a celor de detaliu se vor utiliza pe cît posibil, un număr minim de cunoștințe matematice.

Am socotit că o asemenea carte poate fi utilă în actuala perioadă de dezvoltare științifică din țara noastră, cînd prin învățămîntul de toate gradele precum și prin munca noastră de răspîndire a științei în rîndul maselor, se creează oameni luminați, cadre de constructori ai socialismului.

Succesele științei și tehnicii din ultimii ani, care au făcut posibil zborul omului în cosmos, au marcat totodată și începutul unei epoci în care probleme considerate altădată ca o preocupare exclusivă a oamenilor de știință de strictă specialitate, devin treptat elemente ce fac parte din viața noastră obișnuită. Printre aceste probleme se numără desigur și cele tratate în această carte.

Lucrarea conține o introducere și patru capitole. In introducere se face un scurt istoric al geometriei lui Euclid și a momentelor mai importante din descoperirile geometriilor neeuclidiene. Se arată apoi cum interesul lumii științifice pentru aceste geometrii a crescut mai ales după utilizarea lor în teoria relativității.

Primul capitol cuprinde elementele mai importante ale geometriei euclidiene, unele din aceste elemente dîndu-se, ca de altfel și alte proprietăți din capitolele următoare, fără demonstrații sau cu demonstrații sumare.

Paragrafele 5, 6 *se ocupă de curbe și suprafețe de gradul al doilea, sau cum se mai numesc, conice și cuadrice. Teoria conicelor și cuadricilor reprezintă o parte interesantă a geometriei euclidiene cu multiple aplicații în astronomie, mecanică, fizică etc.*

In paragraful 7 *sînt prezentate problemele geometrice celebre care au suscitat mult interes în decursul timpurilor și au avut o contribuție însemnată la adîncirea multor altor probleme de geometrie, cum este de exemplu aceea de a ști care sînt condițiile ca o problemă geometrică dată, să poată fi rezolvată numai cu rigla și compasul.*

In paragraful 8 *se dau unele elemente de geometrie proiectivă. Este vorba de acele proprietăți ale geometriei euclidiene, care rămîn invariante la transformările grupului proiectiv. Considerînd subgrupuri ale grupului proiectiv se obțin alte geometrii, la fundarea cărora au adus contribuții importante unii geometri romîni.*

Capitolul II se ocupă de geometriile neeuclidiene. Se dau diferite modele, scoțîndu-se în evidență în special în ultimul paragraf, cum se pot utiliza grupurile discrete pentru construirea unor modele pe care geometria se realizează global. De asemenea, se adîncesc anumite scheme geometrice, scheme care arată că topologia se înglobează astăzi din ce în ce mai organic în geometrie.

In ultimul paragraf al capitolului II intitulat Topologie combinatorie *se dau unele proprietăți geometrice ale complexelor poliedrale, și se introduc numerele lui Betti, care constituie o clasă de invarianți topologici, de o importanță deosebită pentru geometrie și topologie.*

Capitolul III, intitulat Axiomatizare, *expune sub o formă simplificată axiomatizarea dată de Hilbert geometriei lui Euclid precum și a unor geometrii neeuclidiene; în același timp se completează unele rezultate date în capitolele precedente.*

Capitolul IV este consacrat teoriei relativității restrînse și generale, teorie care după cum se știe dă o interpretare geometrică fenomenelor fizice gravitaționale.

Ultimul paragraf conține unele indicații asupra teoriilor unitare, teorii ce urmăresc să interpreteze geometric atît fenomenele fizice gravitaționale cît și fenomenele electromagnetice.

Prezenta lucrare a fost concepută inițial din actualele capitole I, II și IV.

Colaborarea cu distinsul meu elev Costache Teleman a dus la completarea unora din paragrafe și la adăugarea actualului capitol III, elaborat în întregime de el.

Autorii speră că sub această formă cartea va da cititorului o imagine mai completă a geometriei de la începutul ei și pînă astăzi.

Acad. Prof. G. VRÂNCEANU

15. XI. 1963

ÎNTRODUCERE

Matematica este una din cele mai vechi științe; posibilitatea omului de a număra și de a face socoteli a constituit una din primele lui victorii în drumul spre cucerirea naturii[1]. Ea a apărut din nevoile practice ale oamenilor, din măsurarea loturilor de pămînt și a capacității vaselor, din calcularea timpului și din mecanică.

Noțiunile și concluziile matematicii cu tot caracterul lor abstract își au rădăcinile în realitate și-și găsesc vaste aplicații în alte științe, în tehnică, în toată practica vieții. În general, progresul științei este legat de progresul matematicii. Fără matematică ar fi fost imposibilă întreaga tehnică modernă, cît și dezvoltarea mecanicii, astronomiei, și în bună măsură a chimiei. La început matematica conținea aritmetica — știința numerelor, și geometria — știința figurilor. Mai tîrziu s-au impus alte discipline matematice, cum sînt algebra, analiza, sau disciplinele care au un pronunțat caracter aplicativ, cum sînt astronomia și mecanica.

Printre disciplinele matematice, geometria a fost aceea care i-a pasionat mult pe matematicieni în decursul timpurilor, atît prin caracterul ei abstract, cît și prin legăturile pe care ea le are cu problemele filozofice ce se referă la noțiunile de spațiu, timp și materie.

Antichitatea, înțelegînd știința egipteană, babiloniană, chineză, arabă și în special greacă, ne-a lăsat ca moștenire științifică importantă, *geometria*, denumită și geometria lui Euclid, deoarece de la Euclid, savant grec ce a trăit în jurul anului 285 î.e.n., ne-a rămas o expunere completă a acestei geometrii compusă din 13 cărți și intitulată *Elemente de geometrie*. Știința geometriei s-a născut desigur din nevoia pe care omul a avut-o de a măsura și de a compara diferitele figuri între ele, de a evalua arii și volume pentru scopurile lui practice. Ea a fost descoperită de egipteni și a apărut în probleme privind măsurarea pămîntului. Herodot (secolul al V-lea î.e.n.) spune că Sesostris (Ramses al II-lea, 1300 î.e.n.), a împărțit pămîntul

---

[1] Pentru a vedea cum s-a format, de-a lungul timpurilor, noțiunea de număr se poate consulta cartea lui E. K o l m a n, *Istoria matimaticii în antichitate*, Editura Științifică, București, 1963 și *Matematica, conținutul, metodele și importanța ei*, vol. I, Editura Științifică, București, 1962,

în Egipt în bucăţi dreptunghiulare asupra cărora a instituit un impozit anual. Inundaţiile Nilului acoperind o parte din aceste terenuri, a fost necesară o reducere a impozitelor. Aceasta s-a efectuat pe baza măsurării suprafeţelor inundate şi de aici — zice Herodot — pare să fi luat naştere geometria. De altfel numele de geometrie este format din două cuvinte greceşti: primul, *geo*, înseamnă pămînt, în timp ce al doilea, *metreos*, înseamnă măsor.

În cărţile lui Euclid, geometria apare ca o doctrină complet constituită din punct de vedere teoretic, ca o ştiinţă deductivă, ale cărei adevăruri denumite „teoreme" se deduc pe cale logică dintr-un anumit număr de definiţii şi de axiome (sau postulate), deci de propoziţii care nu se demonstrează, ci se admit ca adevăr.

Desigur însă că definiţiile şi axiomele au fost determinate de experienţă, deci de observaţiile care se pot face asupra figurilor în spaţiul în care trăim. Astfel, definiţiile date punctului, dreptei, planului corespund informaţiilor pe care în mod intuitiv le obţinem despre aceste noţiuni. De asemenea, relaţiile existente între aceste noţiuni, de exemplu faptul că prin două puncte trece o singură dreaptă, corespund de asemenea intuiţiei noastre. Adevărurile ştiinţei geometriei corespundeau în expunerea lui Euclid realităţii în aşa măsură, încît s-a considerat că ele au o valoare absolută, că fenomenele care au loc în natură sînt obligatoriu acele ce ni le indică geometria lui Euclid. Au fost filozofi, ca Immanuel Kant, care au socotit că spaţiul în care trăim are proprietăţi apriorice, deci nu este nevoie de a mai cerceta natura, pentru a afirma că spaţiul nostru este cu trei dimensiuni, că în acest spaţiu, drumul cel mai scurt este linia dreaptă, că printr-un punct la o dreaptă într-un plan se poate duce o singură paralelă, deci proprietăţi care rezultă din geometria lui Euclid.

Se admitea deci că există o identitate între geometria lui Euclid şi geometria spaţiului în care trăim. Secolul al XVIII-lea a supus însă geometria lui Euclid la o analiză critică din care a rezultat că această identitate poate să nu existe. S-a pus astfel problema de a se şti dacă axiomele care stau la baza geometriei sînt obligatorii, adică dacă schimbînd unele din aceste axiome, se ajunge la o contradicţie. Se punea, prin urmare, problema dacă există sau nu o singură geometrie.

Încă din antichitate matematicienii au observat că axioma liniilor paralele — denumită axioma a unsprezecea sau postulatul al cincilea al lui Euclid — nu este tot atît de evidentă ca celelalte axiome. Această axiomă se enunţă astfel:

Printr-un punct la o dreaptă într-un plan se poate duce o singură paralelă.

Matematicieni ca Legendre, Saccheri, Gauss, Lobacevski, Bolyai etc. şi-au pus problema de a demonstra această axiomă, deci de a arăta că dacă am presupune că această axiomă nu este adevărată, am ajunge la o contradicţie logică. Perioada discuţiei acestei axiome a durat aproape două secole şi constituie una dintre cele mai încordate perioade ale ştiinţei matematice. Discuţia este tranşată în 1826 de geometrul rus Lobacevski, profesor la Universitatea din Kazan, care arată într-o lucrare intitulată *Cercetări geometrice în teoria paralelelor*, că este imposibil a deduce axioma arătată din celelalte, întrucît ea este independentă de ele. Admiţînd că printr-un punct la o dreaptă într-un plan se pot duce două paralele şi o infinitate de drepte nesecante, el a obţinut o geometrie diferită de a lui Euclid şi care nu conţine nici un fel de contradicţii interne. Aproape în acelaşi timp cu el, geometrul ardelean János Bolyai (1802—1860) a obţinut rezultate asemănătoare. Lucrarea în care şi-a publicat rezultatele cu privire la noua geometrie a fost publicată în 1831 sub numele de *Appendix*. [Este vorba de un adaos la o lucrare a lui Farkas Bolyai][1].

Dintr-o scrisoare datată 6 martie 1832, adresată lui Farkas Bolyai, tatăl lui János Bolyai, rezulta că şi Gauss, numit în acea vreme „principe al matematicienilor", ajunsese la această descoperire. El hotărîse însă să nu publice nimic, atît timp cît va fi în viaţă, de teama criticilor ce i s-ar fi putut aduce, deoarece credinţa într-o geometrie unică era pe vremea aceea prea puternic înrădăcinată. Gauss scrie[2] că „cei mai mulţi oameni nu au o înţelegere clară asupra chestiunilor despre care este aci vorba şi eu am găsit puţini dintre ei care să pună un interes particular în ceea ce eu le spuneam în legătură cu acest subiect. Pentru a putea avea acest interes trebuie mai întîi să simţi adînc ceea ce lipseşte aici şi asupra acestor chestiuni cea mai mare parte a oamenilor sînt într-o obscuritate completă".

Descoperirea lui Lobacevski şi Bolyai a unei alte geometrii decît aceea a lui Euclid se poate considera ca începutul uneia din cele mai mari revoluţii în istoria ştiinţei. În adevăr, această descoperire a pus şi problema naturii spaţiului în care trăim. Însuşi Lobacevski a căutat să aducă un suport geometriei create de el, enunţînd ipoteza că în spaţiul cosmic — deci la mari distanţe de Pămînt —

---

[1] Pentru un comentariu al operelor lui Lobacevski şi Bolyai se pot vedea studiile lui V. F. Kagan. Vezi şi János Bolyai, *Appendix*, Academia R. P. R., Bucureşti, 1951.

[2] Vezi G. Vrănceanu, *Viaţa şi opera lui János Bolyai*, Analele Academiei R. P. R., vol. II, Bucureşti, 1960.

s-ar putea ca să nu fie valabilă geometria lui Euclid, ci noua geometrie descoperită.

În 1854, matematicianul german Bernhard Riemann în lucrarea intitulată *Asupra ipotezelor ce stau la baza geometriei* supune la o analiză amănunțită noțiunea de geometrie și ajunge la concluzia că ceea ce putem să considerăm ca proprietate a spațiului furnizată de experiență este faptul că fiind date două puncte îndeajuns de aproape unul de altul, distanța între aceste puncte este dată de o formulă analogă celeia din geometria lui Euclid, cunoscută sub numele de formula lui Pitagora.

Geometriile introduse de Riemann au în general o curbură diferită de zero, cazul curburii nule corespunzînd geometriei lui Euclid.

Noțiunea de curbură este un invariant geometric, care arată în ce măsură o curbă, o suprafață sau o geometrie diferă de linia dreaptă, de plan sau de geometria lui Euclid. De exemplu, curbura unui cerc este măsurată prin cantitatea $\frac{1}{R}$, unde R este raza cercului. Deci curbura este cu atît mai mică cu cît raza este mai mare și curbura este zero, dacă raza este infinită, caz ce corespunde dreptei.

Dacă curba nu este un cerc, însă este o curbă plană, deci situată într-un plan, atunci fiind dat un punct P al curbei, se poate asocia acestui punct un cerc, numit cercul osculator, care întîlnește curba în trei puncte confundate în P și atunci curbura curbei în P se măsoară prin $\frac{1}{R}$, unde R este raza cercului osculator în P.

În cazul unei suprafețe, curbura K, denumită și curbura lui Gauss, se măsoară într-un punct P prin cantitatea $\frac{1}{R_1 R_2}$, unde R_1 și R_2 sînt razele de curbură minimă și maximă calculate în punctul P ale secțiunilor suprafeței cu plane ce conțin normala în P la suprafață.

Dacă suprafața este o sferă, atunci R_1 și R_2 sînt egale cu raza sferei R, iar curbura K a sferei este o constantă pozitivă $\frac{1}{R^2}$. Există și suprafețe pentru care curbura K să fie o constantă negativă și printre aceste suprafețe intră pseudosfera.

Geometria lui Lobacevski este și ea un caz particular al geometriei lui Riemann; ea corespunde cazului cînd curbura este o constantă negativă.

Mai tîrziu au fost descoperite geometrii diferite de geometriile lui Riemann, geometrii în care fie că se renunță la noțiunea de distanță, fie că se dă această noțiune sub o formă mai generală decît aceea din geometria lui Riemann. Printre geometriile în care nu se definește noțiunea de distanță este și geometria centro-afină, creată la începutul secolului nostru de geometrul romîn G. Țițeica[1].

Așadar din punct de vedere matematic se pot concepe mai multe geometrii, deci mai multe spații.

Trebuia dat un răspuns întrebării: care este geometria corespunzătoare spațiului în care trăim.

Problema se punea și prin faptul că anumite observații în spațiile interplanetare nu puteau fi explicate cu noțiunea de spațiu euclidian. Într-adevăr, se știe că sistemul solar, din care face parte ca planetă și Pămîntul, conține și alte planete, între care cea mai apropiată de Soare este planeta Mercur. Pentru a explica mișcarea pe care planetele o au în jurul Soarelui se utilizează în mecanica clasică așa-numita lege a gravitației universale, sau legea lui Newton, care afirmă că fiind date două corpuri cerești, de exemplu, Soarele și una din planetele sale, ele se atrag unul spre altul cu o forță proporțională cu produsul maselor acestor corpuri și invers proporțională cu pătratul distanței dintre ele. Ținînd seama de această lege rezultă, considerînd ecuațiile mecanicii, că planetele descriu în jurul Soarelui anumite curbe numite elipse, care apar ca niște cercuri puțin alungite. Observațiile executate asupra traiectoriei planetei Mercur arătau însă că această traiectorie nu era exact aceea rezultată din legea lui Newton, ci suferea o deviație. Explicația acestei deviații nu a putut fi obținută cu ajutorul legii gravitației a lui Newton, sau prin eventuale modificări ale acestei legi, ci a fost dată în 1915 de Albert Einstein prin teoria relativității. În această teorie se consideră că spațiul în care trăim este un spațiu al lui Riemann cu patru dimensiuni, a patra dimensiune fiind timpul. În acest spațiu drumul cel mai scurt între două puncte nu mai este linia dreaptă, ci o linie curbă, numită geodezică, spațiul nemaifiind drept ca acela al lui Euclid, ci curb. Traiectoriile luminii nu mai sînt linii drepte, ci geodezice curbe. Pentru verificarea acestei teorii s-au făcut observații în timpul eclipselor de Soare, în vederea calculării curbării traiectoriilor razelor luminoase ce trec prin vecinătatea Soarelui, socotită ca o regiune în care curbura razelor lumi-

[1] G. Țițeica (1870—1930) a fost aproape 40 de ani profesor de geometrie la Universitatea din București. Are lucrări remarcabile în domeniul geometriei dferiențiale proiective și centro-afine.

noase este maximă. În adevăr, printre principiile introduse de teoria lui Einstein figurează și acela că spațiul este drept numai în regiunile goale de materie, că materia este aceea care curbează spațiul. Deci, în sistemul nostru solar, în regiunea din vecinătatea Soarelui, spațiul are cea mai mare curbură.

Alte teorii au căutat să explice pe bază geometrică nu numai fenomenele gravitaționale, ci și fenomenele electromagnetice. Aceste teorii se numesc teorii unitare, însă ele nu au reușit pînă în prezent să se impună prin explicarea unor fenomene pe care nu le poate explica teoria relativității a lui Einstein.

Capitolul I

GEOMETRIE EUCLIDIANĂ

§ 1. DEFINIȚII. AXIOME. TEOREME

Prin geometrie euclidiană se înțelege, acea geometrie care are la bază cele 13 cărți scrise de Euclid. *Elementele* lui Euclid constituie una din operele de știință care s-au bucurat de cel mai mare număr de ediții pe care le-a avut vreodată o carte. Multe sute de ani geometria s-a învățat în diferite țări după lucrarea de bază a lui Euclid[1].

Așa cum am mai spus și în prefață, în aceste cărți geometria apare ca o știință deductivă, bazată pe un anumit număr de definiții și de axiome sau postulate care se admit ca adevărate fără demonstrație, celelalte adevăruri ale geometriei, teoremele, necesitînd o demonstrație, deci o deducere logică din definiții, postulate sau axiome.

Datorită faptului că orice teoremă se demonstrează, geometria lui Euclid a fost considerată mult timp ca un exemplu de știință perfectă, ca o știință în care nimic nu rămîne fără o explicație logică, deci o știință care nu se bazează pe simple observații sau experiențe. Se știe însă că la început, deci înainte de Euclid, geometria era formată dintr-un anumit număr de rezultate practice relative la lungimile, suprafețele și volumele figurilor. Iată ce scrie, de exemplu, A. D. Aleksandrov, rectorul Universității din Leningrad, în cartea: *Matematica, conținutul, metodele și importanța ei*, editată de Institutul de matematică al Academiei de Științe a Uniunii Sovietice[2].

„Primele noțiuni și cunoștințe de geometrie s-au format în epocile preistorice și s-au cristalizat tot în procesul activității practice (ca și noțiunile aritmetice — *N.R.*). Omul a luat formele geometrice chiar din natură. Discul și secera Lunii, oglinda lacului, liniaritatea unei raze sau a unui copac zvelt au existat cu mult înaintea omului și s-au aflat permanent în fața ochilor săi. Desigur, ochiul nostru întîlnește rar în natură, linii destul de drepte, și cu atît mai puțin triunghiuri și pătrate. Este limpede că omul și-a elaborat o idee despre aceste figuri, în primul rînd pentru că a perceput natura în

---

[1] Euclid a trăit între anii 306 și 283 î. e. n. În țara noastră, o ediție completă în limba romînă a *Elementelor* lui Euclida a apărut în 1939, întocmită și adnotată de V. Marian cu o introducere de I. Ionescu.

[2] *Matematica, conținutul, metodele și importanța ei*, vol. I, p. 28.

mod activ și, dînd urmare nevoilor sale practice, a confecționat obiecte de formă tot mai regulată. Oamenii și-au construit locuințe, au cioplit pietre, au îngrădit loturi de pămînt, au întins corzi pe arcurile lor, au modelat vase de argilă, le-au perfecționat și, în mod corespunzător, au creat noțiunea că vasul este *rotund*, că o coardă bine întinsă este *dreaptă*".

Este deci fără îndoială că activitatea practică a oamenilor a servit ca fundament pentru elaborarea noțiunilor abstracte ale geometriei: punctul, dreapta, triunghiul, pătratul, cercul, sfera, cubul și suprafețele sau volumele acestor figuri geometrice.

Se pare însă că de-abia în secolele al VI-lea și al V-lea î.e.n. s-a format ideea de demonstrație a unui adevăr geometric, deci de deducere pe cale logică a acestui adevăr din alte adevăruri mai simple. Ceea ce se știe însă este că în documente scrise, ideea de demonstrație apare abia în *Elementele* lui Euclid, deci în secolul al III-lea î.e.n. sub o formă atît de bine realizată, încît *Elementele* au constituit o carte căreia timp de 2 000 de ani nu i s-au mai putut aduce modificări importante.

Din cele 13 cărți ce formează *Elementele*, 8 sînt de geometrie pură, în timp ce 5 din aceste cărți, și anume cărțile V, VII, VIII, IX, X, sînt dedicate teoriei proporțiilor și aritmeticii tratate prin metode geometrice.

Este interesant de observat că *Elementele* conțin materialul a ceea ce numim azi geometrie elementară. Este de asemenea interesant de observat că noțiuni geometrice cunoscute în timpul lui Euclid, cum este de exemplu teoria conicelor, deci teoria curbelor ce se obțin prin intersecția unui con circular cu un plan, nu sînt considerate în *Elemente*.

Fiecare carte a lui Euclid, începe cu definirea noțiunilor pe care le utilizează acea carte. Astfel, Cartea I începe cu 23 de definiții. Dăm aici aceste definiții:

1. Punctul este ceea ce nu are nici o parte.
2. Linia este o lungime fără lățime.
3. Extremitățile unei linii sînt puncte.
4. Dreapta este linia situată la fel față de toate punctele ei.
5. Suprafața este ceea ce are numai lungime și lățime.
6. Extremitățile unei suprafețe sînt linii.
7. Planul este suprafața situată la fel față de toate dreptele conținute în el.
8. Unghiul plan este înclinația reciprocă a două linii concurente situate într-un plan.
9. Dacă liniile care cuprind unghiul sînt drepte, unghiul se numește rectiliniu.

10. Cînd o dreaptă, ridicată pe o altă dreaptă, formează unghiurile adiacente egale între ele, fiecare din cele două unghiuri egale este drept și dreapta ridicată se numește perpendiculară la aceea pe care a fost ridicată.
11. Unghiul obtuz este acela care e mai mare decît unghiul drept.
12. Unghiul ascuțit, este acel unghi mai mic decît unghiul drept.
13. Margine este ceea ce este extremitate la ceva.
14. Figură este ceea ce e cuprins de una sau mai multe margini.
15. Cerc este o figură plană cuprinsă de o linie plană, astfel că toate dreptele duse dintr-un punct în interiorul figurii sînt egale între ele.
16. Acel punct se numește centrul cercului.
17. Diametru al cercului este o dreaptă oarecare dusă prin centru și terminată de ambele părți pe periferia cercului și care înjumătățește cercul.
18. Semicerc este figura cuprinsă între diametre și periferia tăiată de el, iar centrul semicercului e același ca al cercului.
19. Figuri rectilinii sînt cele cuprinse de drepte, trilatere de trei, patrulatere de patru, iar multilatere cele cuprinse de mai multe decît patru drepte.
20. Dintre figurile trilatere, triunghiul echilateral este acela care are trei laturi egale; isoscel, acela care are numai două laturi egale; scalen, acela care are cele trei laturi neegale.
21. Dintre figurile trilatere, triunghiul dreptunghic este acela care are un unghi drept; triunghiul obtuzunghi, acela care are un unghi obtuz; triunghiul ascuțitunghi, acela care are trei unghiuri ascuțite.
22. Dintre figurile patrulatere, pătrat e acela care este echilater și dreptunghic; dreptunghi, acela care este dreptunghic dar nu e echilater; romb, acela care este echilater, dar nu e dreptunghic; romboid, acela care are atît laturile cît și unghiurile opuse egale între ele, dar nu este nici echilater nici dreptunghic; patrulaterele în afară de acestea să se numească trapez[1].
23. Paralelele sînt drepte care, fiind situate în acela și plan și fiind prelungite în mod indefinit, de ambele părți, nu se întîlnesc în nici o parte.

După cum vedem, definițiile 1, 4, 7, 9 definesc punctul, dreapta, planul și unghiul a două drepte, deci acele figuri geometrice ce se impun în construcția figurilor care sînt formate din linii drepte cum ar fi triunghiurile sau poligoanele cu mai multe laturi în plan, cubul sau prisma în spațiu.

[1] În terminologia actuală, trapezul este un patrulater cu două laturi paralele.

În ce privește definițiile 2 și 5, ele definesc noțiunea de linie, deci de curbă, și noțiunea de suprafață, în timp ce definițiile 3 și 6 fac legătura între noțiunile de curbă și punct și noțiunile de suprafață și curbă, arătînd că extremitățile unei curbe, de exemplu extremitățile unui arc de cerc, sînt puncte, în timp ce marginile unei suprafețe sînt curbe, de exemplu cercurile ce mărginesc o suprafață cilindrică. Definiția 8 ne spune ce este unghiul a două curbe, iar definițiile 11–22 se referă la elementele geometrice simple cerc, triunghi, patrulater etc.

În ce privește ultima definiție, ea se referă la drepte paralele. Desigur unele din definițiile date de Euclid, cum sînt acelea relative la punct, curbă, suprafețe, nu sînt considerate azi satisfăcătoare și asupra lor vom reveni în cadrul acestei cărți.

După definiții, Euclid introduce postulatele și axiomele. Ordinea acestor postulate și axiome variază de la o ediție la alta a *Elementelor*. Dăm aici o enumerare ce se utilizează de obicei, care introduce cinci postulate, și anume:

I. Două puncte determină o dreaptă.
II. Orice dreaptă poate fi prelungită indefinit.
III. Din orice centru se poate duce un cerc cu orice rază vrem.
IV. Toate unghiurile drepte sînt egale între ele.
V. Cînd o secantă taie alte două drepte și formează cu ele unghiuri interne și așezate de aceeași parte a secantei a căror sumă este mai mică decît două unghiuri drepte, dreptele se vor intersecta de acea parte a secantei unde această sumă este mai mică decît două unghiuri drepte.

Postulatele dau deci proprietăți ce leagă noțiunile geometrice introduse în definiții.

Urmează apoi axiomele. În unele ediții apar cinci axiome și după unii comentatori cuvîntul axiomă are sens de noțiune comună[1]. Într-adevăr, axiomele se referă la elemente numite cantități a căror natură nu se specifică, ele putînd fi numere sau segmente, arii, volume etc. Iată aceste cinci axiome:

I. Două cantități egale cu a treia sînt egale între ele.
II. Dacă la cantități egale se adaugă cantități egale se obțin cantități egale.
III. Dacă din cantități egale se scad cantități egale se obțin cantități egale.
IV. Mărimile care coincid sînt egale.
V. Întregul este mai mare ca partea.

[1] Vezi E u c l i d, *Elemente*, vol. I, Biblioteca Gazetei matematice, 1939–1941, p. 7.

În alte ediții apar nouă axiome, adăugîndu-se axiomele:
VI. Dacă la mărimi neegale se adaugă mărimi egale se obțin mărimi neegale.
VII. Dacă se dublează mărimi egale se obțin mărimi egale.
VIII. Jumătățile mărimilor egale sînt egale, care după cum vedem sînt ca și primele cinci mai mult de natură aritmetică. În sfîrșit, a noua axiomă ce se introduce este de natură geometrică și spune:
IX. Două drepte nu pot închide un spațiu[1].

Nu se știe cu precizie dacă această axiomă aparține lui Euclid. În unele ediții ale *Elementelor*, postulatele IV și V sînt trecute printe axiome și deci postulatul V, care se numește și postulatul paralelelor, apare ca axioma XI. De altfel, nu se poate face o distincție între postulate și axiome, așa că de fapt postulatul sau axioma înseamnă un adevăr, care se acceptă fără demonstrații.

O dată însă date definițiile și axiomele sau postulatele, toată construcția geometriei trebuie să rezulte prin demonstrație, deci să fie formată din teoreme.

Iată prima teoremă pe care o dă Euclid.

Pe o dreaptă finită dată să se construiască un triunghi echilateral.

Fie AB dreapta finită dată[2].

Trebuie așadar să se construiască pe dreapta AB un triunghi echilateral.

Să se descrie cu centrul A și distanța AB cercul BCD; din nou să se descrie cu centrul B și distanța BA cercul ACE și din punctul C în care se intersectează cercurile să se ducă la punctele A, B dreptele CA, CB. Rezultă atunci că $CA = CB$, în virtutea axiomei I, deoarece ele sînt egale cu AB și deci CAB este triunghiul echilateral căutat.

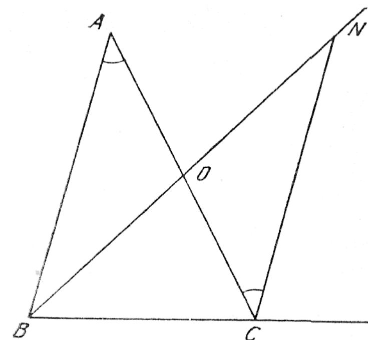


Fig. 1

Este interesant de observat că Euclid a ales ca primă teoremă de demonstrat această teoremă în care utilizează noțiunea de cerc, pe care el o consideră ca o noțiune dată de definiția 15. De asemenea este de observat că Euclid nu conchide că sînt două soluții, deși două cercuri se taie în două puncte și deci triunghiul $C'AB$, unde

[1] Vezi de exemplu N. V. E f i m o v, *Geometrie superioară*, Editura Tehnică, București 1952, p. 9.
[2] Utilizăm traducerea lui V. Marian. Se folosește însă azi în geometrie noțiunea de segment $\overline{AB}$, în loc de dreaptă finită AB.

C' este al doilea punct de intersecție al cercurilor, este de asemenea o soluție a problemei. În sfîrșit, să observăm că Euclid nu demonstrează că cele două cercuri se intersectează.

Teoremele 2—26 care urmează sînt relative la triunghiuri și importantă este mai ales teorema 16, care spune:

A. *In orice triunghi prelungind una din laturi, unghiul extern este mai mare decît fiecare din unghiurile interne și opuse.*

Să demonstrăm, de exemplu, că unghiul exterior din C este mai mare decît unghiul interior din A. Pentru aceasta, fie O mijlocul segmentului $\overline{AC}$. Să unim B cu O și să considerăm punctul N așa fel ca O să fie mijlocul segmentului $\overline{BN}$. Unind N cu C (fig. 1) triunghiul BOA este egal cu triunghiul NOC, deoarece printr-o rotație de 180° aceste triunghiuri se suprapun și atunci se vede că unghiul interior din A în triunghiul ABC este numai o parte din unghiul exterior din C și teorema este demonstrată.

Teorema 27 dată de Euclid prezintă un interes special deoarece ea se referă la drepte paralele. Teorema 27 are următoarea formulare:

B. *Dacă o dreaptă, tăind două drepte, formează unghiurile alterne egale între ele, cele două drepte sînt paralele.*

Demonstrația se bazează pe teorema A.

Să presupunem că dreptele s-ar întîlni. Atunci s-ar forma un triunghi pentru care unul din unghiurile alterne este unghi interior, iar celălalt este exterior și cum ele sînt egale, avem o contrazicere cu teorema 16, deci dreptele nu se pot întîlni, cu alte cuvinte ele sînt paralele.

Rezultă de aici că două drepte perpendiculare pe o a treia sînt paralele între ele. Într-adevăr, unghiurile alterne sînt în acest caz

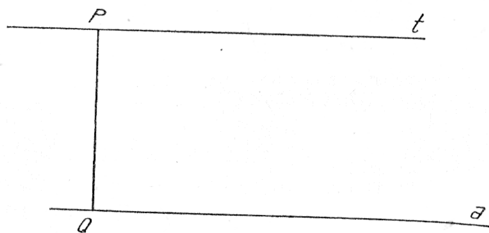


Fig. 2

drepte și unghiurile drepte sînt toate egale în baza postulatului patru. Rezultă de asemenea că printr-un punct P se poate duce întotdeauna o dreaptă paralelă la o dreaptă dată a (fig. 2). Să ducem

din P perpendiculară pe dreapta a. Fie PQ această perpendiculară. Să ducem atunci prin P o perpendiculară pe dreapta PQ. Fie Pt această perpendiculară. Rezultă atunci că dreapta Pt este paralelă cu dreapta a, deoarece formează cu dreapta PQ unghiuri alterne egale.

Să demonstrăm acum teorema:

C. *Printr-un punct la o dreaptă într-un plan se poate duce o singură paralelă.*

Să notăm ca mai sus cu a dreapta dată și cu P un punct exterior dreptei. Să ducem prin P o perpendiculară pe dreapta a. Fie PQ această perpendiculară. Să ducem prin P o perpendiculară Pt la dreapta PQ. Această perpendiculară este evident paralelă la dreapta a conform teoremei de mai sus.

Să arătăm că dreapta Pt construită mai sus este singura paralelă dusă prin P la dreapta a. În adevăr, să presupunem că ducem prin P o dreaptă Ps ce nu este perpendiculară la dreapta PQ, deci face cu PQ de o anumită parte un unghi mai mic decît un unghi drept. Dreapta Ps și a fac deci de o anumită parte a dreptei PQ unghiuri interne a căror sumă este mai mică ca două unghiuri drepte, deci conform postulatului V dreptele Ps și a se întîlnesc. Prin urmare, singura dreaptă dusă prin P ce nu întîlnește dreapta a este perpendiculara Pt pe PQ și teorema este demonstrată.

Rezultă deci că postulatul V are drept consecință teorema C.

Este însă interesant de observat că dacă se admite ca postulat teorema C, rezultă ca teoremă postulatul V.

Să presupunem în adevăr că în loc de postulatul V luăm ca postulat teorema C, sau așa-numitul postulat al paralelelor: *printr-un punct la o dreaptă se poate duce o singură paralelă.*

Rezultă atunci ca fiind date două drepte a, b tăiate de o secantă în punctele A, B, dacă aceste drepte formează unghiuri interne de o aceeași parte a căror sumă este mai mică decît două unghiuri drepte, atunci ele se întîlnesc, căci altfel prin A am putea duce două drepte paralele la dreapta b, și anume dreapta a și dreapta ce face cu a un unghi în așa fel ca suma unghiurilor interne să fie două unghiuri drepte.

Să demonstrăm acum teorema:

D. *Două drepte paralele tăiate de o secantă formează unghiuri alterne interne și unghiuri corespondente egale.*

Teorema rezultă, evident, din faptul că conform postulatului V, suma unghiurilor interne de o aceeași parte trebuie să fie egală cu două unghiuri drepte.

Să demonstrăm de asemenea teorema:

E. *Suma unghiurilor într-un triunghi este egală cu două unghiuri drepte.*

Fie ABC triunghiul dat și fie At paralela dusă prin A la dreapta BC. Se observă că unghiul α este egal cu unghiul B ca alterne interne, în timp ce unghiul β este egal cu unghiul C ca corespondente, ceea ce demonstrează teorema, căci $A+B+C=A+\alpha+\beta=180°$.

Fig. 3

Se poate arăta de asemenea că în locul postulatului V poate fi luată teorema E, deci ipoteza că suma unghiurilor într-un triunghi este egală cu două unghiuri drepte și e posibilă demonstrarea următoarei teoreme:

Dacă suma unghiurilor unui singur triunghi este egală cu două unghiuri drepte, atunci orice triunghi va avea suma unghiurilor egală cu două unghiuri drepte.

De observat însă că pentru demonstrația acestei teoreme este nevoie de a utiliza axioma lui Arhimede, care spune că fiind date două segmente a și b, unde a este mai mic decît b, atunci există un număr întreg, n, astfel încît să avem $na > b$[1], axiomă care stă la baza teoriei mărimilor dezvoltată de matematicienii greci.

Menționăm că există și alte teoreme echivalente cu postulatul lui Euclid, cum este teorema:

Dacă există un unghi ascuțit astfel că perpendiculara ridicată în orice punct al unei laturi taie cealaltă latură, înseamnă că are loc postulatul lui Euclid[2].

Demonstrațiile date mai sus utilizează anumite propoziții a căror justificare nu părea necesară lui Euclid. De exemplu, proprietatea că două puncte într-un plan sînt sau nu de aceeași parte a unei drepte rezultă numai dacă se admite un număr de axiome numite de ordonare, așa cum ne arată axiomatizarea geometriei euclidiene făcută de Hilbert în 1899 și care va fi expusă în capitolul III. De asemenea proprietatea unui segment de a avea un mijloc depinde tot de aceste axiome de ordonare.

---

[1] Vezi N. V. Efimov, *op. cit.*, pp. 27, 28. Această propoziție, numită principiul sau axioma lui Arhimede, fusese enunțată de asemenea de Eudoxus (468–355 î. e. n.) și de Aristotel (384–322 î. e. n.). Arhimede (287–212 î. e. n.) este însă acela care a scos în evidență importanța acestei propoziții.

[2] *Ibidem*, p. 30.

§ 2. EGALITATEA ȘI ASEMĂNAREA FIGURILOR. TEOREMA LUI PITAGORA

O noțiune geometrică importantă este noțiunea de egalitate a figurilor. Două figuri geometrice, de exemplu două triunghiuri, se zic egale, dacă putem deplasa unul din triunghiuri în așa fel încît să se suprapună peste celălalt. Posibilitatea deplasării figurilor dintr-un loc în altul apare ca un lucru de la sine înțeles în geometria lui Euclid. Astfel, am utilizat proprietatea de egalitate a triunghiurilor la demonstrarea teoremei A din paragraful precedent. Este însă interesant de remarcat că comportarea figurilor prin suprapunere presupune mișcarea unei figuri dintr-un loc în altul și în această mișcare se presupune implicit că elementele figurii, segmente și unghiuri rămîn neschimbate. Euclid presupune deci fără a preciza explicit că fiind dat un segment $\overline{AB}$ ce unește punctul A cu punctul B se poate construi un segment egal cu $\overline{AB}$ ce unește punctul C cu un alt punct D, deci în așa fel încît să avem $\overline{AB}=\overline{CD}$. Se presupune o proprietate analogă pentru unghiuri. Iată de exemplu teorema 46 a lui Euclid.

Pe un segment dat $\overline{AB}$ să se construiască un pătrat.

Pentru demonstrație să ducem pe dreapta AB (fig. 4) în punctele A și B drepte perpendiculare pe AB de o aceeași parte a lui AB. Fie AC și BE aceste drepte. Pe dreapta AC să luăm punctul D în așa fel încît $\overline{AD}$ să fie egal cu $\overline{AB}$.

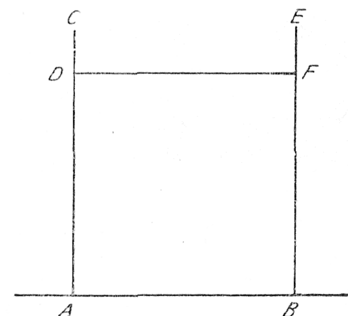


Fig. 4

Să ducem acum prin D o paralelă la dreapta AB. Această paralelă taie dreapta BE în F. Figura $ABDF$ este pătratul căutat. În adevăr, această figură este un paralelogram cu laturile egale și unghiurile drepte.

În teorema imediat următoare, deci în teorema 47, Euclid demonstrează teorema care se datorește lui Pitagora și care spune că într-un triunghi ABC dreptunghic în A (fig. 5), suma ariilor pătratelor laturilor $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$ ce se numesc și catetele triunghiului este egală cu aria pătratului construit pe latura $\overline{BC}$, ce se numește ipotenuza triunghiului. Deci, dacă convenim să no-

tăm cu a ipotenuza $\overline{BC}$, cu b, c, catetele $\overline{AC}$ și $\overline{AB}$, ia cu a^2, b^2, c^2 ariile pătratelor construite pe aceste laturi, atunci avem:

$$a^2 = b^2 + c^2. \qquad (1)$$

ce constituie teorema lui Pitagora[1]. Pentru a obține demonstrația dată de Euclid teoremei lui Pitagora să construim pe laturile triunghiului ABC pătratele $AGFB$, $AHKC$, $BCSR$ (fig. 5). Să ducem din A perpendiculara pe ipotenuză și fie D și L intersecțiile cu $\overline{BC}$ și $\overline{RS}$.

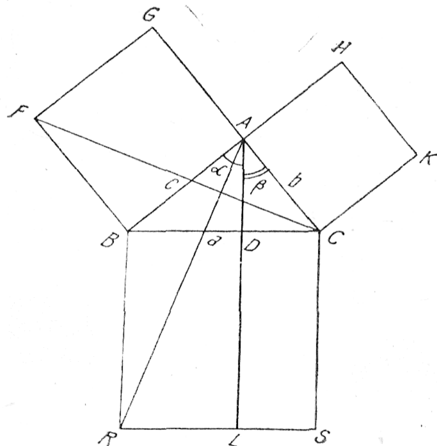


Fig. 5

Să observăm acum că triunghiurile ABR și FBC sînt egale deoarece $\overline{AB} = \overline{FB}$, $\overline{BR} = \overline{BC}$ și unghiul ABR egal cu unghiul FBC. În adevăr, fiecare din aceste unghiuri se obține din unghiul ABC adăugînd un unghi drept. De altfel, este ușor de văzut că ABR se suprapune pe FBC după o rotație de un unghi drept în jurul lui B. Pe de altă parte, aria triunghiului ABR este jumătate din aria dreptunghiului $BRLD$, deoarece triunghiul și dreptunghiul au aceeași bază $\overline{BR}$ și aceeași înălțime, distanța între laturile paralele $\overline{BR}$ și $\overline{AL}$.

De asemenea, triunghiul FBC are ca arie jumătate din aria pătratului $AGFB$, deci pătratul $AGFB$ și dreptunghiul $BDLR$ au ariile egale, deci avem egalitatea:

$$c^2 = a \cdot \overline{BD}, \qquad (2)$$

care spune că:

Cateta este medie proporțională între ipotenuză și segmentul $\overline{BD}$, unde punctul D este piciorul perpendicularei coborîte din A pe ipotenuză.

[1] P i t a g o r a din Samos (580—500 î. e. n.). Lui Pitagora, în afară de această teoremă i se datoresc și alte descoperiri importante în geometrie, și în particular teorema că suma unghiurilor într-un triunghi este egală cu două unghiuri drepte. Cazuri particulare ale teoremei lui Pitagora erau cunoscute cu mult înainte de egipteni, indieni și chinezi. Matematicienii indieni cunoșteau chiar principiile pentru demonstrarea teoremei.

În mod analog se demonstrează că avem:

$$b^2 = a \cdot \overline{DC}; \qquad (2')$$

adunînd obținem:

$$b^2 + c^2 = a(\overline{BD} + \overline{DC}) = a^2,$$

deci egalitatea (1) este demonstrată. Din demonstrație rezultă că formula (1) trebuie interpretată ca o relație între ariile pătratelor construite pe laturile triunghiului ABC. De altfel, în teoria mărimilor a lui Eudoxus, două mărimi nu se înmulțesc, deci nu are sens produsul unei laturi cu ea însăși. Produsul a două lungimi se consideră ca o mărime de natură nouă, numită arie. Ariile fiind mărimi, se pot aduna și egalitatea a două arii are de asemenea sens.

Dacă ținem seama de faptul că suprafața unui pătrat de latură a este egală cu a^2, teorema lui Pitagora spune că aria pătratului construit pe ipotenuză este egală cu suma ariilor pătratelor construite pe catete. Se pot da și alte demonstrații teoremei lui Pitagora. O demonstrație bazată pe teoria asemănării triunghiurilor se datorește lui Bhaskara al II-lea, născut în anul 1114, iar alta lui Leonardo Pisano (aproximativ 1170-1250). În adevăr, să coborîm din vîrful unghiului drept A o perpendiculară pe ipotenuză și fie D piciorul perpendicularei. Se formează atunci două triunghiuri ABD și ADC. Aceste triunghiuri sînt și ele triunghiuri dreptunghice ca și triunghiul dat ABC. Cum pe de altă parte unghiurile B și C sînt complementare, deci au ca sumă un unghi drept, iar unghiurile α și β sînt de asemenea complementare, rezultă că avem $B = \beta$, $C = \alpha$, deci triunghiurile ABD și ADC au unghiurile egale.

Se zice că două triunghiuri care au unghiurile egale sînt asemenea.

Două triunghiuri asemenea au însă laturile proporționale. Demonstrația acestei proprietăți utilizează teorema lui Tales[1].

Această teoremă spune:

Dacă într-un triunghi ABC (fig. 6) ducem o paralelă la una din laturi, de exemplu, paralela $\overline{DE}$ la latura $\overline{BC}$, atunci segmentele determinate pe laturile triunghiului sînt proporționale.

Deci avem:

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{AE}}.$$

[1] Cunoscut sub numele de T a l e s din Milet (639—548 î. e. n.), este după Proclus (485—412 î.e.n.) primul matematician grec care vizitînd Egiptul a adus doctrina geometrică din această țară în Grecia.

Adăugînd numitorii la numărători, obținem:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}.$$

Să presupunem însă că deplasăm triunghiul BAC de-a lungul laturii $\overline{BA}$ pînă ce B vine în D. Vom avea atunci relația:

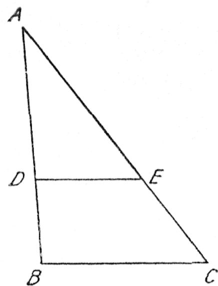


Fig. 6

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}}.$$

și ținînd seama de relația de mai sus rezultă formulele:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}}.$$

Să observăm că dacă avem două triunghiuri ABC, $A'B'C'$ cu unghiurile respectiv egale, deci asemenea, putem întotdeauna printr-o mișcare să ducem punctul A' în punctul A, iar latura $\overline{A'B'}$ să se suprapună pe latura $\overline{AB}$. Cum însă unghiul A' este egal cu unghiul A, rezultă că putem face ca și $A'C'$ să se suprapună pe $\overline{AC}$ și atunci sîntem în cazul figurii 6 deoarece $\overline{B'C'}$ va fi paralelă cu $\overline{BC}$, căci aceste drepte formează cu dreapta AB unghiuri corespondente egale.

Rezultă deci că fiind date două triunghiuri asemenea ABC, $A'B'C'$, laturile lor sînt proporționale, deci avem:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}.$$

Este de remarcat că proporționalitatea laturilor în cele două triunghiuri trebuie să fie scrisă în așa fel, încît laturile corespondente să corespundă unghiurilor egale din cele două triunghiuri. Să revenim acum la demonstrarea teoremei lui Pitagora prin triunghiuri asemenea

Ținînd seama că triunghiul ABD este asemenea cu ABC (v. fig. 5), deoarece au unghiul din B comun și unghiul C egal cu α, putem scrie proporția:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}}.$$

unde la numărător avem laturile triunghiului ABD și la numitor laturile corespunzătoare din triunghiul ABC, ceea ce ne dă formula (2).

În mod analog obținem formula (2') din asemănarea triunghiurilor ADC și ABC și prin urmare obținem demonstrarea teoriei asemănării.

Teorema lui Pitagora se poate extinde în spațiu la un paralelipiped dreptunghic (fig. 7), deci un paralelipiped ale cărui fețe plane sînt perpendiculare una pe alta. Notînd $\overline{AB} = a$, $\overline{AD} = b$, $\overline{BF} = c$ și diagonala $\overline{DF}$ cu d, avem formula:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2. \tag{3}$$

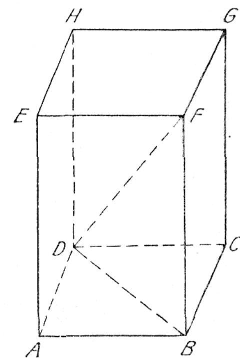


Fig. 7

Teorema lui Pitagora aplicată triunghiului ABD, dreptunghic în A, ne dă:

$$\overline{BD}^2 = a^2 + b^2.$$

De asemenea, aplicînd teorema lui Pitagora triunghiului DBF dreptunghic în B, obținem:

$$d^2 = \overline{BD}^2 + c^2,$$

din care rezultă formula (3) dacă înlocuim pe $\overline{BD}^2$ cu valoarea obținută mai sus.

§ 3. TRIGONOMETRIE PLANĂ

Cele mai simple figuri plane sînt desigur triunghiurile. Un triunghi ABC este cunoscut dacă se cunosc laturile a, b, c și unghiurile opuse A, B, C.

Cum însă suma unghiurilor într-un triunghi este egală cu două unghiuri drepte, rezultă deci că este deajuns să cunoaștem laturile și două din unghiuri pentru a cunoaște triunghiul[1].

Ținînd seama că unghiurile se măsoară în grade și laturile în unități de lungime s-a simțit nevoia să se asocieze unghiurilor mărimi care să poată fi de asemenea măsurate cu o unitate de lungime. De aici a luat naștere trigonometria, care studiază triunghiurile asociind unghiurilor anumite numere numite linii trigonometrice.

[1] În ce privește laturile a, b, c, ele trebuie să satisfacă condiția ca fiecare din ele să fie mai mică ca suma celorlalte două.

Fiind dat un unghi A al triunghiului ABC (fig. 8) din vîrful A descriem un cerc de rază egală cu unitatea și fie M, N punctele de intersecție ale cercului cu laturile triunghiului. Din punctul M să coborîm o perpendiculară pe latura $\overline{AB}$ și fie P piciorul acestei perpendiculare. Lungimea segmentului $\overline{MP}$ se zice că constituie sinusul unghiului A, iar lungimea lui $\overline{AP}$ cosinusul unghiului A și se notează:

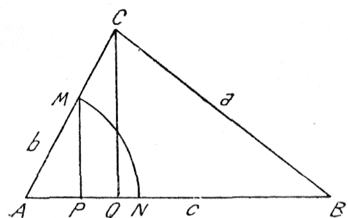


Fig. 8

$$\sin A = \overline{MP}, \qquad \cos A = \overline{AP}. \qquad (4)$$

Formula lui Pitagora ne spune că avem:

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1. \qquad (4')$$

Dacă A este, ca în figură, un unghi ascuțit, $\overline{MP}$ și $\overline{AP}$ sînt considerate cantități pozitive. Dacă unghiul A este zero, atunci sinusul lui este zero, în timp ce cosinusul este 1. Dacă unghiul A este drept, deci de $90°$, atunci sinusul ia valoarea 1 și cosinusul este zero. Dacă convenim să notăm cu π un unghi de $180°$, deci cu $\frac{\pi}{2}$ unghiul de $90°$ și dacă A este un unghi obtuz ce variază între $\frac{\pi}{2}$ și π, atunci sinusul variază de la 1 la 0, în timp ce cosinusul variază de la 0 la -1. Formulele (4) se pot extinde și la alte valori ale lui A negative sau pozitive, utilizînd relațiile:

$$\sin(A + \pi) = -\sin A, \qquad \cos(A + \pi) = -\cos A,$$

în care s-a ținut seama că liniile trigonometrice nu se schimbă dacă unghiului i se adaugă un multiplu de 2π, deci un unghi de forma $2n\pi$, unde n este un număr întreg.

Se introduc, și alte linii trigonometrice, și anume tg A, cotg A, sec A, cosec A definite prin formulele:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}, \quad \operatorname{cotg} A = \frac{\cos A}{\sin A},$$

$$\sec A = \frac{1}{\sin A}, \quad \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\cos A}.$$

Să observăm acum că dacă avem o dreaptă AB și un segment $\overline{AC}$ și considerăm proiecția $\overline{AQ}$ a segmentului $\overline{AC}$ pe AB, deci din C ducem o perpendiculară $\overline{CQ}$ pe AB, atunci triunghiurile AMP și ACQ sînt

asemenea, deoarece $\overline{MP}$ și $\overline{CQ}$ sînt paralele. Din proporționalitatea laturilor rezultă, ținînd seama că $\overline{AM} = 1$:

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AC}}{1} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{MP}} \qquad (5)$$

și din prima egalitate obținem formula:

$$\overline{AQ} = \overline{AC} \cos A, \qquad (5')$$

care se exprimă spunînd că lungimea proiecției unui segment pe o dreaptă este egală cu lungimea segmentului înmulțită cu cosinusul unghiului pe care segmentul îl face cu dreapta.

Rezultă deci că în formula (2) putem înlocui $\overline{BD}$ prin formula $\overline{BD} = c \cos B$, și deci formula (2) se poate încă scrie:

$$c = a \cos B, \qquad (6)$$

care se exprimă spunînd:

Intr-un triunghi dreptunghic o catetă este egală cu ipotenuza înmulțită cu cosinusul unghiului alăturat.

Ținînd seama că suma unghiurilor $B + C$ într-un triunghi dreptunghic este un unghi drept, deci unghiurile B, C sînt complementare, rezultă ușor formulele:

$$\cos B = \sin C, \qquad \cos C = \sin B$$

și deci într-un triunghi dreptunghic avem în afară de formula (6) și analoga ei:

$$b = a \cos C; \qquad (6')$$

de asemenea, formulele:

$$b = a \sin B, \qquad c = a \sin C \qquad (7)$$

și prin împărțire formulele

$$\begin{aligned} c &= b \operatorname{tg} C, & c &= b \operatorname{cotg} B \\ b &= c \operatorname{tg} B, & b &= c \operatorname{cotg} C \end{aligned} \qquad (7')$$

ceea ce spun *o catetă este egală cu cealaltă catetă înmulțită cu tangenta unghiului opus sau cu cotangenta unghiului alăturat.*

Formulele (6), (6'), (7), (7') conțin toată trigonometria unui triunghi dreptunghic și evident și formula lui Pitagora. În adevăr, ridicînd

formula (6) la pătrat şi însumînd-o cu prima formulă (7) ridicată la pătrat se obţine formula (1).

Dacă avem un triunghi oarecare ABC, atunci ţinînd seama de formula (5') şi de formula analogă

$$\overline{NB} = a \cos B,$$

rezultă formula:

$$c = \overline{AN} + \overline{NB} = a \cos B + b \cos A, \tag{8}$$

formulă care exprimă următorul rezultat.

Intr-un triunghi oarecare o latură este egală cu suma celorlalte două înmulţite respectiv cu cosinusurile unghiurilor alăturate lor.

De asemenea din formula (5) obţinem:

$$\overline{CN} = b \sin A = a \sin B,$$

şi, prin urmare, au loc următoarele egalităţi:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \tag{9}$$

care ne spun că avem teorema:

Intr-un triunghi laturile sînt proporţionale cu sinusurile unghiurilor opuse.

Dacă scriem şi formulele analoge formulelor (8), şi anume

$$\begin{aligned} b &= a \cos C + c \cos A, \\ a &= c \cos B + b \cos C \end{aligned} \tag{9'}$$

şi dacă înmulţim prima din aceste formule cu b şi o adunăm cu formula (8) înmulţită cu c, obţinem:

$$b^2 + c^2 = a(b \cos C + c \cos B) + 2bc \cos A,$$

ceea ce ne conduce ţinînd seama de ultima formulă (9') la formula:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \tag{10}$$

formulă ce generalizează pentru un triunghi oarecare teorema lui Pitagora. Formula (10) a fost dată în limbaj pur geometric, ca o relaţie între arii, de Euclid şi Heron.

Formulele (8), (9), (10) conţin în ele toată trigonometria triunghiurilor oarecare şi din ele obţinem formulele de trigonometrie într-un

triunghi dreptunghic, presupunînd că unul din unghiuri este un unghi drept. Astfel, dacă A este un unghi drept, avem $\cos A = 0$ şi $\sin A = 1$. În acest caz, formula (10) devine formula lui Pitagora (1), iar formulele (8), (9) şi prima formulă (9') devin formulele (6), (6'), (7).

Ţinînd seama că formulele (9) precum şi formula (10) ne permit să exprimăm unul din elementele unui triunghi (laturi sau unghiuri) în funcţie de alte trei, dintre care cel puţin un element este o latură, rezultă că un triunghi este în general determinat dacă se dau trei din elementele sale, şi anume trei laturi, sau două laturi şi un unghi, sau o latură şi două unghiuri. De exemplu, dacă se dau două laturi să zicem b, c şi unghiul A cuprins între ele, atunci formula (10) ne dă latura a, iar formulele (5) ne dau $\sin B$, deci unghiul B şi triunghiul este complet cunoscut, deoarece al treilea unghi C este dat de formula:

$$C = \pi - A - B.$$

Pentru triunghiurile dreptunghice, un unghi fiind întotdeauna drept, este suficient a se da două din elementele triunghiului, anume un unghi ascuţit şi una din laturi sau două laturi.

Este interesant de observat că în cazul triunghiurilor dreptunghice se poate pune o problemă interesantă, care a preocupat pe matematicieni încă din antichitate, şi anume de a se găsi triunghiuri dreptunghice pentru care laturile sînt numere întregi, ceea ce revine a rezolva în numere întregi ecuaţia

$$b^2 + c^2 = a^2. \tag{10'}$$

O soluţie se atribuie chiar lui Pitagora:

$$b = n, \quad c = \frac{1}{2}(n^2 - 1), \quad a = \frac{1}{2}(n^2 + 1), \tag{10''}$$

unde n este un număr întreg impar.

O altă soluţie se atribuie lui Platon[1]

$$b = 2n, \quad c = n^2 - 1, \quad a = n^2 + 1, \tag{10'''}$$

în care n este un număr oarecare.

Soluţia lui Pitagora pentru $n = 3$ şi soluţia lui Platon pentru $n = 2$, conduc la triunghiul dreptunghic în care catetele sînt numerele 3, 4, iar ipotenuza este 5.

---

[1] Platon (429—348 î. e. n.) este cunoscut mai ales ca filozof; ca matematician a contribuit la descoperirea numerelor iraţionale.

Soluţia lui Pitagora se poate generaliza. Astfel avem, de exemplu:

$$b = nm,\quad c = \frac{1}{2}(n^2 - m^2),\quad a = \frac{1}{2}(n^2 + m^2), \qquad (10^{IV})$$

în care numerele n, m sînt amîndouă de aceeaşi paritate (ambele pare sau ambele impare). De asemenea, se poate generaliza soluţia lui Platon

$$b = 2nm,\quad c = n^2 - m^2,\quad a = n^2 + m^2,$$

unde n, m sînt numere oarecare.

§ 4. COORDONATE ORTOGONALE. GRUP DE MIŞCARE

Fiind dată o dreaptă u (fig. 9) să fixăm un punct al acestei drepte, să zicem O, şi să luăm un punct A_1 la dreapta lui O pe care să-l numim punct unitate. Altfel spus să considerăm segmentul $\overline{OA_1}$ ca unitate şi să aplicăm acest segment fie la dreapta fie la stînga lui O de

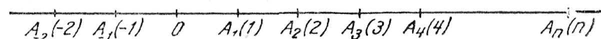


Fig. 9.

un anumit număr de ori. Obţinem atunci anumite puncte $A_2(2), \ldots, A_n(n), A_{-1}(-1)$. Dacă convenim să atribuim punctului O numărul 0, punctului A_1 numărul 1, punctului A_2 numărul 2, ..., punctului A_n numărul n, unde n este un număr întreg pozitiv, punctului A_{-1} numărul -1, etc., zicem că am reprezentat pe dreapta u numerele întregi pozitive şi negative. Ţinînd seama de axioma lui Arhimede, putem deci să reprezentăm pe dreaptă punctele cu coordonate întregi oricît de mari. Fie atunci $\frac{p}{q}$ un număr fracţionar, deci un număr pentru care p şi q sînt numere întregi. Împărţind unitatea în q părţi şi luînd p din aceste părţi vom putea reprezenta şi acest număr pe dreaptă, şi anume la dreapta lui O dacă numărul fracţionar este pozitiv, altfel el se va reprezenta pe dreaptă printr-un punct la stînga lui O.

Putem deci să reprezentăm pe o dreaptă atît numerele întregi cît şi numerele fracţionare, care se numsc *numere raţionale*. În afară de aceste numere există şi aşa-numitele *numere iraţionale*, numere care nu se pot scrie sub forma $\frac{p}{q}$, unde p şi q sînt numere întregi. Un

asemenea număr este, de exemplu, $\sqrt{2}$ care reprezintă diagonala unui pătrat de latură 1, sau ipotenuza unui triunghi dreptunghic isoscel, cu catetele egale cu unitatea. Din formula lui Pitagora (1) rezultă că pentru $b = c = 1$ avem $a^2 = 2$ deci $a = \sqrt{2}$.

Un alt exemplu de număr real iraţional este numărul π, care reprezintă raportul dintre lungimea (circumferinţa) unui cerc şi diametrul cercului; deci avem:

$$\pi = \frac{L}{2R},$$

unde L este lungimea cercului iar R este raza lui. Numărul π reprezintă deci jumătate din lungimea unui cerc de rază 1 şi corespunde unghiului la centru de 180°, care în paragraful precedent a fost de asemenea notat cu π.

Se arată că numerele iraţionale se pot şi ele reprezenta pe dreaptă utilizînd aşa-numita axiomă de continuitate sau axioma lui Cantor-Dedekind şi se convine să se numească numere reale totalitatea de numere formate din numerele întregi, raţionale şi avem atunci proprietatea[1]:

Se poate reprezenta pe o dreaptă u orice număr real în aşa fel, încît oricărui număr real x să-i corespundă un punct de pe dreaptă şi invers, oricărui punct P să-i corespundă un număr real şi numai unul.

Se zice că x constituie o coordonată pe dreapta u, astfel că fiecărui punct P i se asociază un număr real x, coordonata lui.

Este de observat că numerele iraţionale se pot calcula cu ajutorul numerelor zecimale cu o aproximaţie oricît de mare vrem, aşa cum arătase S. Stevin (1548—1620). Să luăm de exemplu $\sqrt{2}$ şi să calculăm acest număr cu o aproximaţie de $\frac{1}{10}$ prin lipsă. Este vorba deci de a căuta cel mai mare număr cu o zecimală al cărui pătrat să fie mai mic decît 2. Un număr cu o zecimală se scrie:

$$m = \alpha + \frac{\beta}{10},$$

unde α, β sînt numere întregi şi β este cuprins între 0 şi 9. Avem deci, dacă $m^2 < 2$,

$$\left(\alpha + \frac{\beta}{10}\right)^2 < 2$$

[1] Vezi de exemplu, G. Vrănceanu, *Geometrie analitică proiectivă şi diferenţială*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1962.

și trebuie să calculăm cele mai mari valori pentru α, β care satisfac această inegalitate. Este ușor de văzut că trebuie să luăm $\alpha = 1$, căci altfel numărul m ar fi mai mare ca 2 și pătratul lui ar fi mai mare decît 4. Trebuie să căutăm deci cel mai mare număr β, în așa fel încît să avem:

$$\left(1 + \frac{\beta}{10}\right)^2 = 1 + \frac{\beta}{5} + \frac{\beta^2}{100} < 2,$$

ceea ce ne dă inegalitatea:

$$\beta^2 + 20\beta - 100 < 0.$$

Se vede ușor că pentru $\beta = 1, 2, 3, 4$ această inegalitate este verificată, în timp ce pentru $\beta = 5$, ea nu mai este verificată; deci trebuie să luăm $\beta = 4$, astfel că valoarea aproximativă a lui $\sqrt{2}$ este 1,4 prin lipsă.

Dacă vrem să calculăm încă o zecimală, trebuie să considerăm inegalitatea

$$\left(\frac{14}{10} + \frac{\gamma}{100}\right)^2 < 2$$

și să luăm cea mai mare valoare întreagă a lui γ ce satisface această inegalitate. Se găsește $\gamma = 1$, deci valoarea aproximativă a lui $\sqrt{2}$ prin lipsă, cu două zecimale, este 1,41. Este de observat că aceste operații se pot face ori de cîte ori vrem și nu vom putea exprima printr-un număr zecimal valoarea lui $\sqrt{2}$ decît cu aproximație. Aceeași proprietate are loc și pentru alte numere reale, de exemplu π, care cu o aproximație de două zecimale este dat de numărul 3,14. Pentru numerele întregi și numerele date de fracții zecimale, deci de forma $\frac{p}{10^n}$, unde p și n sînt numere întregi, operațiile se opresc după un număr finit de pași.

Orice număr real se poate deci scrie sub forma unei sume în general, cu o infinitate de termeni nenuli:

$$\alpha + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{10^n} + \ldots,$$

unde α este partea întreagă a numărului, iar $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sînt numere întregi cuprinse între 0 și 9 inclusiv, și constituie zecimalele numărului.

Un alt exemplu important de număr irațional definit de suma unei serii infinite este numărul e, introdus de Euler[1]

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots, \tag{11}$$

unde $n!$ înseamnă produsul primelor n numere întregi 1, 2, ..., n. Se arată că valoarea lui e, este cu o aproximație de două zecimale, 2,71.

Numărul e este luat ca bază a logaritmilor naturali. Dacă avem un număr pozitiv a, se numește logaritmul natural al lui a și se notează cu $\ln a$, puterea la care trebuie să ridicăm numărul e ca să ne dea pe a. Avem deci:

$$a = e^{\ln a}.$$

Rezultă că $\ln a$ este zero dacă $a = 1$ și este pozitiv sau negativ după cum a este mai mare sau mai mic ca unitatea.

Să observăm acum că alegerea unei coordonate x pe o dreaptă u depinde de originea O și de unitatea de lungime OA_1. Dacă luăm o nouă origine Ω și o nouă unitate de lungime ΩB_1 și notăm cu X coordonata referitoare la Ω și ΩB_1, avem:

$$x = x_0 + kX, \tag{11'}$$

unde x_0 este coordonata lui Ω față de sistemul de coordonate x.

Dacă păstrăm aceeași unitate de lungime, atunci $k = 1$ și se zice că transformarea (11') este o translație.

Dacă păstrăm aceeași unitate de lungime, precum și originea, însă schimbăm partea pozitivă a dreptei în partea negativă, ceea ce se exprimă spunînd că am schimbat orientarea dreptei, atunci rezultă:

$$x = -X \tag{11''}$$

și avem de-a face cu o simetrie față de origine.

Dacă avem două puncte pe dreaptă, să zicem P și P', căror le corespund coordonatele x și x', atunci putem conveni să numim distanță a celor două puncte diferența $x' - x$, luată în valoare absolută[2].

Distanța dintre două puncte ale dreptei u nu se schimbă dacă facem o translație, deci o transformare de forma:

$$x = x_0 + X, \tag{11'''}$$

sau o simetrie (11'').

[1] Leonard Euler (1707—1783) mare matematician. A lucrat la Berlin și Leningrad. A adus o contribuție fundamentală la dezvoltarea matematicii, obținînd rezultate importante în domeniile geometriei, algebrei și analizei.

[2] Valoarea absolută $|a|$ a unui număr a este numărul însuși dacă a este pozitiv, și numărul schimbat de semn dacă a este negativ. Deci valoarea absolută este totdeauna pozitivă.

În acest caz avem:

$$|x' - x| = |X' - X|,$$

deci distanța nu se schimbă printr-o translație sau simetrie.

Să presupunem acum că într-un plan π (fig. 10) luăm două drepte perpendiculare ce se taie într-un punct O și le prelungim de o parte

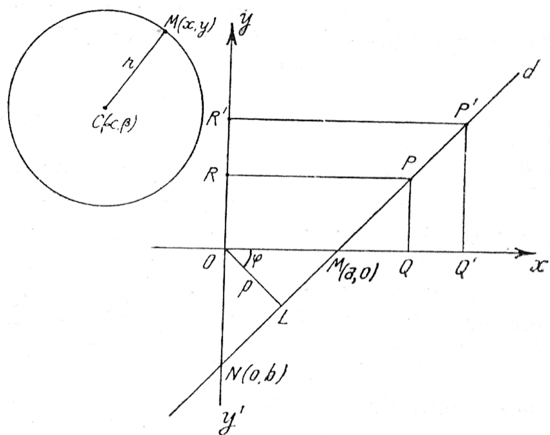


Fig. 10

și de alta indefinit. Să notăm cu Ox și Oy aceste drepte. Se observă că fiind dat un punct oarecare P în planul π putem coborî din P perpendiculare pe dreptele Ox și Oy; atunci figura $OQPR$ este un dreptunghi. Avem deci:

$$\overline{OQ} = \overline{RP}, \quad \overline{OR} = \overline{QP}.$$

Convenim să notăm cu x lungimea segmentului $\overline{OQ}$ și cu y lungimea segmentului $\overline{OR}$ și convenim să considerăm x pozitiv sau negativ după cum Q este la dreapta sau la stînga lui O și y pozitiv sau negativ, după cum R este deasupra sau dedesubtul lui O. Rezultă că poziția punctului P determină complet numerele reale x și y și reciproc.

Se spune că x, y sînt coordonatele punctului P din plan față de sistemul de axe de coordonate Ox, Oy, și anume se zice că x este abscisa și y este ordonata. Așa fiind, rezultă că în baza teoremei lui Pitagora distanța $\overline{OP}$ este dată de formula:

$$\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

De asemenea, fiind dat un alt punct P' de coordonate x', y', distanța PP' este dată în baza teoremei lui Pitagora de formula:

$$\overline{PP'} = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}. \tag{12}$$

Introducerea coordonatelor în geometrie a fost făcută empiric, adică fără demonstrații, de matematicieni babilonieni.

Geometrii greci din antichitate utilizau de asemenea coordonate, dar la ei acestea nu erau numere care să se poată înmulți sau din care să se poată extrage rădăcini de diferite ordine, ci mărimi de un anumit tip — anume lungimi. De asemenea, geometrii elini utilizau sisteme de coordonate legate de o anumită figură, ceea ce limita posibilitățile de dezvoltare ale acestei metode. Geometria analitică ca metodă a fost creată de Fermat[1] și mai ales de Descartes[2], într-o perioadă în care calculul cu numere raționale și iraționale era foarte dezvoltat (secolul al XVII-lea).

Prin introducerea coordonatelor se poate utiliza în studiul geometriei calculul algebric, și diferite probleme geometrice pot fi rezolvate cu mai multă ușurință și într-o formă generală.

Sistemul de coordonate din fig. 10 se numește sinistrorsum, deoarece trebuie să rotim axa Ox de un unghi de 90° pentru a o face să se suprapună peste axa y de la dreapta la stînga, deci făcînd o mișcare inversă aceleia ce o fac acele unui ceasornic. Dacă axa y ar avea orientarea inversă, deci aceea ce corespunde lui Oy', sistemul s-ar numi dextrorsum. Dacă numim cu x', y' coordonatele față de sistemul Oxy', atunci avem formulele:

$$x' = x, \quad y' = -y, \tag{12'}$$

care constituie o simetrie față de axa x. Rezultă deci că se trece de la sistemul de coordonate sinistrorsum Oxy la sistemul de coordonate dextrorsum Oxy' prin simetria (12′).

Ecuația unei drepte. Să demonstrăm următoarea teoremă:

In sistemul de coordonate x, y o ecuație de forma

$$ax + by + c = 0, \tag{12''}$$

unde a, b, c sînt numere reale și a, b nu sînt ambele nule, reprezintă o dreaptă.

---

[1] Pierre Fermat (1601—1665) a contribuit prin cercetările sale la dezvoltarea teoriei numerelor și este cunoscut mai ales prin teorema lui Fermat, nedemonstrată încă în întregime (vezi cap. I. § 7).

[2] René Descartes (1596—1650), matematician și filozof francez.

Într-adevăr, dacă $b = 0$, deci $a \neq 0$, ecuaţia se poate scrie:

$$x = c_1 \qquad \left(c_1 = -\frac{c}{a}\right), \qquad (12''')$$

unde c_1 este o constantă, şi ecuaţia (12''') reprezintă evident o dreaptă paralelă cu axa Oy. Reciproca este de asemenea adevărată. Prin urmare o dreaptă paralelă cu axa Oy este dată de o ecuaţie de forma (12''').

Dacă $b \neq 0$, atunci rezolvînd în raport cu y, putem scrie ecuaţia (12'') sub forma:

$$y = mx + n \qquad \left(m = -\frac{a}{b}, \quad n = -\frac{c}{b}\right), \qquad (13)$$

şi dacă $m \neq 0$, deci $a = 0$, această ecuaţie reprezintă o dreaptă paralelă cu axa Ox.

Dacă $m \neq 0$ această ecuaţie reprezintă o dreaptă ce taie axa y în punctul N de ordonată n, iar axa x în punctul M de abscisă $-\frac{n}{m}$.

Pentru demonstraţie se observă că punctele $N(0, n)$ şi $M\left(-\frac{n}{m}, 0\right)$ satisfac ecuaţia (13). Să considerăm atunci dreapta MN şi fie $S(x, y)$ un punct oarecare al acestei drepte. Să notăm cu $T(x, 0)$ proiecţia acestui punct pe axa x.

Din asemănarea triunghiurilor MON şi MTS rezultă:

$$\frac{\overline{TS}}{\overline{ON}} = \frac{\overline{MT}}{\overline{MO}}.$$

Ţinînd seama că avem

$$\overline{TS} = y, \qquad \overline{ON} = n, \qquad \overline{MT} = \overline{MO} + \overline{OT},$$

$$\overline{MO} = -\overline{OM} = \frac{n}{m}, \qquad \overline{OT} = x,$$

obţinem ecuaţia (13). Aşadar, orice punct S al dreptei MN verifică ecuaţia (13). Rezultă că ecuaţia (13) reprezintă dreapta MN şi că orice dreaptă este definită de o ecuaţie de forma (12''), deci de o ecuaţie liniară în x, y.

Rezultă deci teorema:

O dreaptă în planul Oxy este dată sau de ecuaţia (12'''), *dacă este paralelă cu Oy, sau de ecuaţia* (13).

Se poate observa că o dreaptă (12''') şi o dreaptă (13) nu sînt niciodată paralele, coordonatele x_0, y_0 ale punctului lor de intersecţie fiind definite de formulele:

$$x_0 = c_1, \quad y_0 = mc_1 + n.$$

Dacă sînt date două drepte (13), de exemplu dreptele

$$y = mx + n, \quad y = m'x' + n',$$

scăzînd membru cu membru aceste ecuaţii, obţinem ecuaţia:

$$(m - m')\,x + n' - n = 0.$$

Această ecuaţie se poate rezolva în raport cu x, dacă m este diferit de m', şi în acest caz dreptele se întîlnesc. Dacă $m = m'$ şi $n \neq n'$, dreptele nu se întîlnesc, deci sînt paralele. Dreptele coincid dacă avem în acelaşi timp $m = m'$, $n = n'$.

Rezultă deci că fiind date două ecuaţii liniare:

$$ax + by + c = 0, \quad a'x + b'y + c' = 0,$$

ele reprezintă două drepte confundate dacă coeficienţii ecuaţiilor lor sînt proporţionali, deci dacă avem:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Dacă aceste condiţii nu sînt verificate, ecuaţiile noastre reprezintă două drepte distincte şi dreptele sînt paralele dacă a, b sînt proporţionale cu a', b'.

Dreapta ce trece prin două puncte date. Să arătăm acum că o dreaptă este complet determinată prin două puncte. Fie $P_0(x_0, y_0)$ şi $P_1(x_1, y_1)$ aceste puncte. Să scriem că aceste puncte sînt pe dreapta (12''). Aceasta înseamnă că ele verifică ecuaţia (12''), deci că avem ecuaţiile:

$$ax_0 + by_0 + c = 0$$
$$ax_1 + by_1 + c = 0.$$

Scăzînd prima din aceste ecuaţii din ecuaţia a doua, obţinem:

$$a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) = 0.$$

Întrucît P_0 şi P_1 sînt distincte, nu avem în acelaşi timp $x_1 = x_0$ şi $y_1 = y_0$. Să presupunem că avem $x_1 \neq x_0$, deci că punctele P_0, P_1 nu sînt pe o aceeaşi paralelă la axa y, ecuaţia de mai sus ne dă:

$$\frac{b}{x_1 - x_0} = \frac{a}{y_1 - y_0},$$

şi cum avem, de asemenea, pentru punctele $P(x, y)$, $P_0(x_0, y_0)$

$$\frac{b}{x - x_0} = \frac{a}{y - y_0},$$

rezultă că dreapta ce trece prin punctele P_0, P_1 se scrie sub forma:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0};$$

sau sub forma unui determinant egalat cu zero:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dacă $x_1 = x_0$, atunci trebuie să avem $y_1 \neq y_0$ şi dreapta este paralelă la axa y dată de ecuaţia (12'''), în care $c_1 = x_1 = x_0$.

O altă formă importantă a ecuaţiei unei drepte este:

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1,$$

unde $M(\alpha, 0)$ şi $N(0, \beta)$ sînt punctele de intersecţie ale dreptei cu axele de coordonate Ox, Oy (fig. 10).

De asemenea, dacă proiectăm originea pe dreapta d (v. fig. 10) şi notăm cu p distanţa de la origine la dreaptă, avem ecuaţia:

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = p,$$

care se numeşte ecuaţia normală a dreptei. În sfîrşit, să amintim ecuaţia unei drepte ce trece printr-un punct $P_0(x_0, y_0)$ şi este paralelă cu o direcţie dată m

$$y = y_0 + m(x - x_0).$$

Dacă m este variabil avem o infinitate de drepte ce trec prin P_0. Ele constituie un fascicul de drepte cu centrul în P_0.

Puncte coliniare. Trei puncte $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ se zic coliniare dacă se găsesc pe aceeaşi dreaptă, în care caz determinantul

$$D = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

este egal cu zero şi invers, dacă D este egal cu zero punctele sînt coliniare. Vom observa, de asemenea, că dacă punctele nu sînt coliniare, deci dacă $D \neq 0$, atunci aria triunghiului $P_0P_1P_2$ este dată de formula:

$$A = \frac{D}{2} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (13')$$

Unghiul a două drepte. Fiind dată o dreaptă d (fig. 10) definită de ecuaţia (12'') numind cu θ unghiul pe care această dreaptă îl face cu axa Ox, atunci m este egal cu tangenta unghiului θ şi se numeşte *coeficientul unghiular al dreptei d*. În ce priveşte n, această cantitate se cheamă ordonata la origine. Ea reprezintă depărtarea de origine a punctului N (fig. 10).

Dacă avem două drepte de ecuaţii (13), atunci unghiul între aceste drepte este dat de formula $\varphi = \theta' - \theta$, deci avem:

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\theta' - \theta) = \frac{\operatorname{tg} \theta' - \operatorname{tg} \theta}{1 + \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \theta'} = \frac{m' - m}{1 + mm'}$$

şi prin urmare dreptele sînt perpendiculare dacă avem:

$$1 + mm' = 0. \qquad (13'')$$

De asemenea, dacă avem două puncte $P_1(x_1, y_1)$ şi $P_2(x_2, y_2)$ este uşor de văzut că numind cu φ unghiul dintre OP_1 şi OP_2 avem formula:

$$\cos \varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}. \qquad (13''')$$

Cercul. Să observăm acum că fiind dată o curbă oarecare în plan, ea va fi reprezentată de o ecuaţie de forma:

$$F(x, y) = 0,$$

deci de o legătură între coordonatele x, y. Această ecuaţie este liniară în x, y numai dacă curba este o dreaptă. Dacă curba este un *cerc* cu centrul în punctul $C(a, b)$ şi de rază r, ecuaţia ei se scrie:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2, \qquad (13^{IV})$$

deci este o ecuaţie de gradul al doilea şi exprimă faptul că distanţa unui punct $P(x, y)$ al cercului la centrul C este egală cu r (fig. 10). Dacă cercul are centrul pe axa Ox, atunci $b = 0$ şi ecuaţia cercului se scrie:

$$(x - a)^2 + y^2 = r^2.$$

Dacă centrul cercului este în origine, atunci ecuaţia lui se scrie:

$$x^2 + y^2 = r^2. \qquad (13^{V})$$

Elipsa. Menţionăm, de asemenea, ca o curbă specială *elipsa* (fig. 11) a cărei ecuaţie este:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (13^{VI})$$

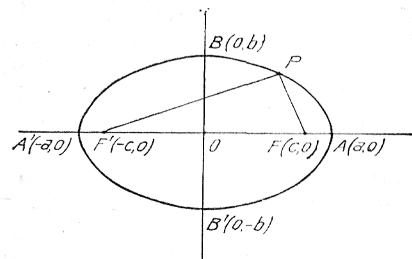


Fig. 11

unde a, b $(a > b)$ sînt constante pozitive date.

Punctele $F(c, 0)$ şi $F'(-c, 0)$ situate pe axa Ox avînd abscisele c, $-c$ în aşa fel încît avem:

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

deci astfel încît b, c, a sînt catetele şi ipotenuza unui triunghi dreptunghic, se numesc focarele elipsei. Elipsa se poate defini ca locul geometric al punctelor pentru care suma distanţelor de la un punct P al curbei la cele două focare este constantă. Avem deci formula:

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a, \quad [\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a].$$

Se vede că elipsa se reduce la un cerc dacă cele două focare coincid într-un punct, ce devine centrul cercului: în acest caz, $a = b = r$.

Coordonate în spaţiu. Coordonatele se pot introduce şi în spaţiu. În acest caz, luînd trei plane perpendiculare două cîte două, să notăm cu Ox, Oy, Oz dreptele de intersecţie ale celor trei plane, luate cîte două. Putem să considerăm atunci drept coordonate ale unui punct P distanţele x, y, z ale acestui punct la cele trei plane, aceste distanţe fiind numere pozitive sau negative (vezi fig. 12). În acest caz, distanţa între două puncte $P(x, y, z)$, $P'(x', y', z')$ este dată de formula lui Pitagora în spaţiu

$$d = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2} \qquad (14)$$

şi care este echivalentă cu faptul că pătratul diagonalei unui paralelipiped dreptunghic este egal cu suma pătratelor muchiilor (fig. 7).

Dacă luăm două puncte P_1, P_2 de coordonate $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ şi notăm cu φ unghiul dintre $\overline{OP_1}$ şi $\overline{OP_2}$, avem formula:

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \qquad (14')$$

Se convine deseori să se spună că un segment $\overline{OP_1}$ defineşte

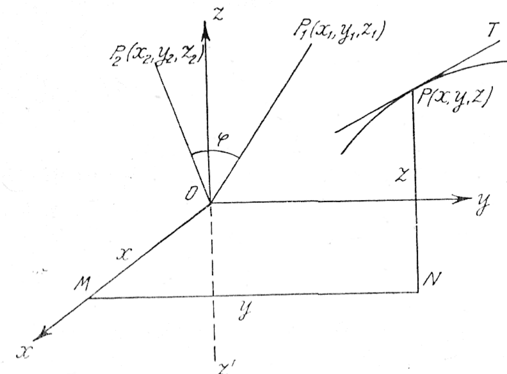


Fig. 12

un vector v_1 ale cărui componente sînt x_1, y_1, z_1. Această formulă se scrie atunci:

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = v_1v_2\cos\varphi, \qquad (14'')$$

unde v_1, v_2 sînt lungimile vectorilor $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$.

Primul membru al formulei (14″) se zice că constituie produsul scalar al vectorilor v_1, v_2.

În spaţiu, într-un sistem de coordonate carteziene ortogonale, un plan este dat de o ecuaţie liniară

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

în care A, B, C, D sînt constante şi bineînţeles A, B, C nu sînt toate nule.

O suprafaţă este dată de o ecuaţie de forma $F(x, y, z) = 0$; de exemplu ecuaţia unei sfere cu centrul $C(a, b, c)$ şi raza R se scrie:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

O curbă se poate defini ca intersecția a două suprafețe și poate fi de asemenea definită de ecuații de forma:

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t), \qquad (14''')$$

unde se presupune în general că funcțiile f, φ, ψ sînt continue și derivabile, în raport cu parametrul t. Dacă f, φ, ψ sînt funcții liniare deci avem:

$$x = at + \alpha, \quad y = bt + \beta, \quad z = ct + \gamma, \qquad (14^{IV})$$

unde a, b, c, α, β, γ sînt constante, curba este o linie dreaptă și în acest caz derivatele funcțiilor f, φ, ψ sînt constantele a, b, c, constante ce se numesc și parametrii directori ai dreptei (14^{IV}).

În general, derivatele f', φ', ψ' ale funcțiilor f, φ, ψ într-un punct P ne dau parametrii directori ai tangentei la curbă în P (fig. 12).

Vom menționa și în acest caz că sistemul de coordonate din fig. 12 se spune că este orientat sinistrorsum, deoarece un observator care ar sta cu picioarele în O și cu capul în direcția pozitivă a axei z ar vedea axa Ox rotindu-se de un unghi de 90°, ca să se suprapună peste Oy, de la dreapta la stînga. Dacă partea pozitivă Oz ar fi luată ca Oz', atunci sistemul $Oxyz'$ ar fi orientat dextrorsum.

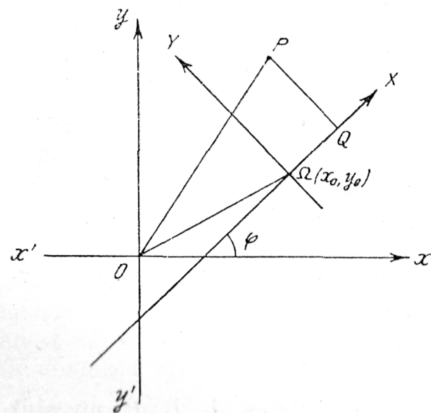


Fig. 13

Două sisteme de axe se zice că au aceeași orientare, dacă ambele sînt orientate sinistrorsum sau dextrorsum.

Transformări de coordonate. Introducerea sistemelor de coordonate ortogonale în plan sau în spațiu și noțiunea de distanță dată de formula (12) în plan și de formula (14) în spațiu ridică problema de a ști cum se modifică abscisa și ordonata unui punct sau distanța între două puncte cînd schimbăm sistemul de coordonate. Să presupunem că într-un plan, unde avem un sistem de coordonate ortogonale Oxy, considerăm un alt sistem de coordonate ΩXY cu aceeași orientare (fig. 13). Ținînd seama că proiecțiile pe o axă a două linii poligonale ce au aceeași origine și aceeași extremitate sînt egale, obținem, proiectînd segmentul OP și linia poligonală $O\Omega QP$ pe axa x și apoi pe axa y, respectiv:

$$x = x_0 + X\cos\varphi - Y\sin\varphi$$
$$y = y_0 + X\sin\varphi + Y\cos\varphi, \qquad (15)$$

unde x_0, y_0 sînt coordonatele lui Ω față de sistemul de axe Oxy, iar φ este unghiul dintre axa Ox și axa ΩX.

Rezultă deci că cele două coordonate x, y se exprimă în funcție de coordonatele X, Y prin o transformare (15). Dacă sistemul Oxy ar fi fost dextrorsum, deci Oxy', atunci în formula (15) y ar fi fost cu semn schimbat, așadar, am fi avut formulele:

$$x = x_0 + X\cos\varphi - Y\sin\varphi$$
$$y = y_0 - X\sin\varphi - Y\cos\varphi. \qquad (15')$$

În primul caz perechea de semidrepte Ox, Oy se poate supra pune pe ΩX, ΩY printr-o deplasare în plan, cum se vede din fig. 13

În al doilea caz suprapunerea unghiului xOy' peste unghiul ΩXY necesită și o simetrie față de o dreaptă și se zice că transformarea de variabile schimbă în acest caz orientarea axelor. În cazul formulelor (15) se poate trece de la sistemul de axe Oxy la sistemul de axe ΩXY, făcînd o translație a sistemului Oxy de-a lungul segmentului Ω și apoi o rotație de unghi φ și axa Ox se suprapune pe axa ΩX, iar axa Oy pe axa Ωy. În loc să interpretăm formulele (15) sau (15') ca o schimbare de coordonate, putem presupune că ele definesc o transformare a planului, ce asociază fiecărui punct de coordonate (X, Y) punctul de coordonate (x, y). Se spune atunci că formulele (15), (15') definesc mișcări ale planului.

Noțiunile de deplasare și de mișcare ce schimbă orientarea figurilor îi erau cunoscute lui Euclid, care le folosea însă cu multă rezervă. Astfel se pare că Euclid apelează la noțiunea de deplasare în cazul egalității triunghiurilor numai fiindcă nu a putut să formuleze o axiomă adecvată.

Întrucît atît sistemul de coordonate Oxy, cît și ΩXY sînt ortogonale rezultă că distanțele se definesc prin aceeași formulă (12). Invers, dacă o transformare de variabile păstrează distanța definită de formula (12), această transformare este de forma (15) sau (15').

În formulele (15), (15') cantitățile x_0, y_0, φ au valori arbitrare și ele pot varia prin continuitate. Dacă $x_0 = y_0 = \varphi = 0$, atunci formulele (15) definesc transformarea identică:

$$x = X, \quad y = Y,$$

în timp ce formulele (15′) definesc simetria față de axa Ox:

$$x = X, \quad y = -Y. \tag{15''}$$

De asemenea, formulele (15), (15′) se pot rezolva în raport cu X, Y și avem evident formulele:

$$X = (x - x_0) \cos \varphi + (\pm y - y_0) \sin \varphi,$$
$$Y = -(x - x_0) \sin \varphi + (\pm y - y_0) \cos \varphi, \tag{15'''}$$

unde semnul $+$ în $\pm$ corespunde formulelor (15), iar semnul $-$ corespunde formulelor (15′). Formulele (15‴) se mai pot scrie:

$$X = X_0 + x \cos \varphi \pm y \sin \varphi$$
$$Y = Y_0 - x \sin \varphi \pm y \cos \varphi$$

unde X_0, Y_0 sînt coordonatele lui O față de sistemul de axe ΩXY.

Este de asemenea evident că dacă efectuăm o altă transformare de axe, ce trece de la sistemul ΩXY la un alt sistem, să zicem Σuv, se poate trece direct printr-o mișcare (15) sau (15′) de la Oxy la Σuv, ceea ce se exprimă spunînd că produsul a două transformări (15) sau (15′), deci rezultatul a două transformări executate una după alta, este o transformare de aceeași formă. Faptul că transformările (15), (15′) posedă transformarea identică, că orice transformare are o inversă și că produsul a două transformări este o transformare de aceeași formă se exprimă spunînd că transformările (15), (15′) formează un grup — grupul mișcărilor din planul lui Euclid. Acest grup este deci format din translații, ce sînt de forma:

$$x = x_0 + X, \quad y = y_0 + Y, \tag{16}$$

ce se obțin, în cazul în care în (15) avem $\varphi = 0$, din rotații

$$x = X \cos \varphi - Y \sin \varphi$$
$$y = X \sin \varphi + Y \cos \varphi \tag{16'}$$

ce se obțin din (15) cînd $x_0 = y_0 = 0$, deci cînd sistemele de coordonate Oxy, OXY au aceeași origine și aceeași orientare și din simetriile (15″) ce se obțin din (15′) cînd $x_0 = y_0 = \varphi = 0$.

Dacă sîntem în spațiu, grupul deplasărilor este de asemenea format din translații:

$$x = x_0 + X, \quad y = y_0 + Y, \quad z = z_0 + Z, \tag{17}$$

din simetria față de un plan, de exemplu:

$$x = X, \quad y = Y, \quad z = -Z \tag{17'}$$

și din rotații, care se scriu:

$$\begin{aligned} x &= \alpha X + \beta Y + \gamma Z \\ y &= \alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z \\ z &= \alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'' Z, \end{aligned} \tag{18}$$

unde α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'' satisfac ecuațiile numite *relații de ortogonalitate*:

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1 & \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' &= 0 \\ \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 &= 1 & \alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' &= 0 \\ \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 &= 1 & \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' &= 0. \end{aligned} \tag{18'}$$

În adevăr transformările (17), (17′) și (18), (18′) păstrează distanța definită de formula (14) și invers, dacă o transformare de coordonate are această proprietate, ea este de forma (17), (17′), (18) (18′).

Faptul că grupul deplasărilor în plan sau spațiu păstrează distanțele este de o deosebită importanță. Se arată că el păstrează și unghiurile și deci lasă figurile geometriei lui Euclid neschimbate; în schimb, putem printr-o mișcare să ducem o figură dintr-un loc al spațiului în alt loc și s-o comparăm cu altă figură prin suprapunere. Se poate spune deci că geometria lui Euclid este geometria unui grup de transformări, și anume grupul deplasărilor (translații, rotații și simetrii).

Considerarea geometriei euclidiene ca geometria unui grup de transformări este utilă deoarece s-a stabilit că și alte geometrii, de exemplu, geometriile neeuclidiene sau geometria proiectivă, se pot defini ca geometrii asociate anumitor grupuri și a condus la stabilirea unei metode unitare de cercetare pentru o clasă importantă de geometrii. Această metodă, cunoscută sub numele de *Programul de la Erlangen*, se datorește lui Felix Klein, care a indicat-o în anul 1872[1].

Ideea de compunere a două transformări a apărut explicit tîrziu, anume prin secolul al XVII-lea. Totuși, dacă ținem seama că Euclid făcea legătura între egalitatea a două figuri și posibilitatea de a trece de la o figură la alta egală cu prima printr-o deplasare, putem afirma că un aspect al operației de compunere a două transformări se găsește în cărțile lui Euclid. Într-adevăr, în teoria mărimilor se presupunea că două mărimi egale cu a treia sînt egale între ele. Dacă aplicăm acest principiu la figuri, rezultă că dacă o figură A

[1] Felix Klein (1849–1925), matematician german ce a contribuit în mare măsură la fundamentarea geometriei euclidiene și a introdus noi geometrii, care astăzi se numesc *geometrii kleiniene* sau geometrii cu grup fundamental.

se poate deplasa în figura C şi dacă figura B se poate de asemenea deplasa în figura C, atunci A se poate deplasa în figura B, prin compunerea transformării care duce pe A în C cu deplasarea care duce înapoi figura C în figura B. De altfel, cele trei condiţii ce caracterizează un grup redau în limbajul transformărilor cele trei proprietăţi ale egalităţii: 1) orice mărime este egală cu ea însăşi; 2) dacă mărimea A este egală cu mărimea B, atunci B este egală cu A; 3) două mărimi egale cu a treia sînt egale între ele.

Posibilitatea de a interpreta formulele (15), (15′) sau (17) şi (18) în două moduri; ca provenind dintr-o schimbare a sistemului de coordonate sau ca o deplasare a planului sau spaţiului întreg a fost pusă în evidenţă începînd din secolul al XVII-lea.

Euler a consacrat cîteva lucrări studiului transformărilor ortogonale şi a obţinut rezultate ce au găsit aplicaţii importante în mecanică. Astfel, el a arătat că orice rotaţie în spaţiu se poate exprima cu ajutorul a trei unghiuri, ce se numesc unghiurile lui Euler. Altfel spus, ecuaţiile (18′) se pot rezolva introducînd trei unghiuri φ, ψ, θ[2]. Mecanica a dat un impuls important studiului deplasărilor în plan şi în spaţiu. Astfel, Toricelli (1608-1647), Roberval (1602-1675), Descartes, Bernoulli (1654-1705), d'Alembert (1717-1783), Euler au arătat că o deplasare în plan sau în spaţiu, ce păstrează orientarea şi care nu este o translaţie, are un centru de rotaţie, respectiv o axă de rotaţie. Aceste rezultate au aplicaţii importante la studiul mişcării corpurilor rigide.

§ 5. CURBE DE GRADUL AL DOILEA

Am văzut în paragraful precedent că atît cercul cît şi elipsa sînt definite în coordonate carteziene ortogonale de ecuaţii de gradul al doilea. Curbele de gradul al doilea au fost mult studiate încă din antichitate, datorită faptului că ele se prezintă în multe probleme de aplicaţii şi au fost numite de geometrii greci, conice, deoarece se obţin prin intersecţia unui con circular drept cu un plan. În afară de elipsă sau cerc, avem alte două tipuri interesante de conice: hiperbola şi parabola. Toate aceste curbe se pot obţine plecînd de la o ecuaţie generală de gradul al doilea în două variabile, pe care o putem scrie:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \quad (19)$$

unde a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33} sînt şase constante, nu toate nule. Ne putem întreba cum arată curba definită de o asemenea ecuaţie.

[2] Vezi, de exemplu, G. Vrănceanu, *op. cit.*, pp. 221–222.

Pentru aceasta vom presupune că cel puţin una din constantele a_{11}, a_{12}, a_{22} este diferită de zero, căci altfel curba (19) nu ar fi de gradul al doilea. Să considerăm o rotaţie de axe dată de formulele (16′). Ecuaţia (19) se va transforma într-o ecuaţie de aceeaşi formă, deci tot într-o ecuaţie de gradul al doilea.

$$A_{11}X^2+2A_{12}XY+A_{22}Y^2+2A_{13}X+2A_{23}Y+A_{33} = 0, \quad (19')$$

în care coeficienţii termenilor de gradul al doilea sînt daţi de formulele:

$$A_{11} = a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi$$
$$A_{12} = [a_{22} - a_{11}]\sin\varphi\cos\varphi + a_{12}[\cos^2\varphi - \sin^2\varphi] \quad (20)$$
$$A_{22} = a_{11}\sin^2\varphi - 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\cos^2\varphi.$$

Ţinînd seama de formulele trigonometrice

$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi, \quad \cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi,$$

putem să mai scriem a doua formulă (20);

$$A_{12} = \frac{a_{22} - a_{11}}{2}\sin 2\varphi + a_{12}\cos 2\varphi, \quad (20')$$

ceea ce ne spune că A_{12} depinde de unghiul 2φ, afară de cazul în care avem în acelaşi timp:

$$a_{11} = a_{22}, \quad a_{12} = 0. \quad (21)$$

În acest caz, presupunînd că $a_{11} = a_{22} \neq 0$, căci altfel ecuaţia (19) nu ar fi de gradul al doilea, ecuaţia (19) se scrie:

$$a_{11}(x^2 + y^2) + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (21')$$

şi reprezintă un cerc cu centrul în punctul de coordonate

$$-\frac{a_{13}}{a_{11}}, \; -\frac{a_{23}}{a_{11}}.$$

În adevăr, împărţind cu a_{11} putem scrie ecuaţia (21′) sub forma

$$\left(x + \frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2 + \left(y + \frac{a_{23}}{a_{11}}\right)^2 = \frac{a_{13}^2 + a_{23}^2}{a_{11}^2} - \frac{a_{33}}{a_{11}},$$

ecuaţie ce reprezintă evident ecuaţia unui cerc real, dacă membrul al doilea este pozitiv.

Avem deci teorema:

In coordonate carteziene ortogonale ecuaţia (19) *reprezintă un cerc, dacă condiţiile* (21) *sînt verificate.*

Acest cerc este real dacă cantitatea din membrul al doilea al ecuației (21″) este pozitivă. Dacă membrul al doilea este nul se spune că ecuația reprezintă două drepte imaginare iar dacă membrul al doilea este negativ se convine a spune că ecuația reprezintă un cerc imaginar.

Introducerea elementelor imaginare în geometrie a fost făcută de Monge și de Poncelet. În plan sau spațiu, în afară de punctele reale ce au coordonate reale și primesc o reprezentare în plan sau spațiu, există și puncte imaginare, deci puncte în care cel puțin una din coordonate este imaginară. Aceste puncte nu se reprezintă geometric.

Dacă sîntem de exemplu în planul $O(x, y)$, un punct $P(x, y)$ pentru care avem:

$$x = a + ib, \quad y = c + id,$$

unde $i = \sqrt{-1}$, iar a, b, c, d sînt numere reale se numește un punct imaginar al planului $O(x, y)$.

Perechile de puncte imaginare P, Q, care au coordonatele conjugate, au proprietatea importantă de a se găsi pe o aceeași dreaptă reală.

Într-adevăr, dacă punctul Q are coordonatele

$$x = a - ib, \quad y = c - id,$$

punctele P, Q se găsesc pe dreapta

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a + ib & c + id & 1 \\ a - ib & c - id & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ecuația ce se scrie:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & c & 1 \\ b & d & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

care reprezintă evident o dreaptă reală.

De asemenea, se numește dreaptă imaginară, figura geometrică definită într-un plan de o ecuație liniară cu coeficienți numere complexe. Două drepte imaginare conjugate au ca intersecție un punct real.

Utilizarea elementelor imaginare în geometrie, care a fost în decursul timpurilor obiect de discuție între geometri, are avantajul de a permite enunțarea unor proprietăți geometrice sub formă generală. De exemplu, o dreaptă într-un plan întîlnește un cerc în două puncte reale dacă este secantă, în două puncte confundate dacă este tangentă și în două puncte imaginare dacă este nesecantă. Utilizînd puncte imaginare, putem enunța teorema:

O dreaptă întîlnește un cerc în două puncte care pot fi reale, confundate sau imaginare.

Dacă nu am utiliza elementele imaginare, am spune că o dreaptă întîlnește un cerc în două puncte, într-un punct sau în nici unul, după cum este secantă, tangentă sau exterioară cercului.

Vom menționa, de asemenea, faptul că unele elemente imaginare joacă un rol important în probleme de geometrie. Să considerăm de exemplu cazul ecuației (21″) cu membrul al doilea nul, ecuație pe care o putem scrie:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 0. \tag{22}$$

Această ecuație are ca soluție un singur punct real, punctul $P_0(x_0, y_0)$, deoarece suma a două numere reale și pozitive nu poate fi zero decît dacă fiecare din ele este nul.

Cum ecuația (22) este o ecuație de gradul al doilea, se convine a spune că reprezintă două drepte imaginare. Aceste drepte sînt evident date de ecuațiile:

$$y - y_0 - i(x - x_0) = 0$$
$$y - y_0 + i(x - x_0) = 0$$

Sînt deci două drepte conjugate, ce au ca intersecție punctul real x_0, y_0. Aceste drepte se numesc dreptele izotrope ce trec prin P_0. După cum vedem, ele au coeficienții unghiulari i și $-i$.

Rezultă deci că prin orice punct trec două drepte izotrope.

Este interesant de observat că aceste drepte au proprietăți curioase. De exemplu, o dreaptă izotropă este perpendiculară pe ea însăși. Aplicînd formula (13″), punînd $m = i$ și $m' = -i$, obținem:

$$mm' + 1 = -i^2 + 1 = 0,$$

ceea ce demonstrează afirmația noastră. De asemenea, se introduc curbe imaginare, cum este cercul imaginar de rază $\sqrt{-1}$ sau $\sqrt{-1}R$ unde R este un număr real, sau suprafețe imaginare.

Desigur, atît punctele imaginare cît și dreptele, curbele sau suprafețele imaginare nu pot fi reprezentate în plan sau spațiu.

Să presupunem că ecuația (19) nu reprezintă un cerc, deci că ecuațiile (21) nu sînt verificate.

În acest caz formula (20') ne arată că putem alege unghiul de rotaţie φ în aşa fel, încît să avem $A_{12} = 0$, căci aceasta revine a determina φ prin ecuaţia:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}.$$

Avem deci teorema:

Utilizînd o rotaţie de axe, putem să scriem ecuaţia unei curbe de gradul al doilea sub forma:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \quad (22')$$

Să presupunem că această curbă nu este un cerc, deci că $a_{11} \neq a_{22}$, şi să deosebim cazul în care nici una din constantele a_{11}, a_{22} nu este nulă de cazul în care una din aceste constante este nulă, de exemplu a_{11}. În acest ultim caz, ecuaţia (22) se scrie, împărţind cu a_{22} şi rezolvînd în raport cu y^2,

$$y^2 = 2px + 2qy + r. \quad (22'')$$

Dacă în această ecuaţie $p = 0$, deci $a_{13} = 0$, ecuaţia reprezintă două drepte paralele cu axa Ox, cum este uşor de văzut.

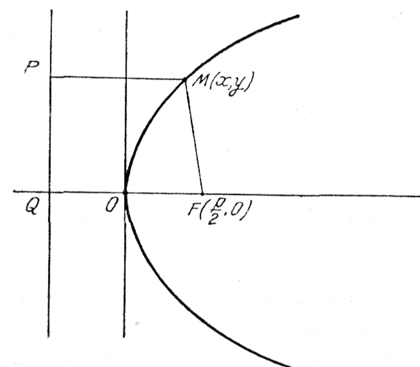


Fig. 14,

Parabola. Să presupunem că în ecuaţia (22'') $p \neq 0$. În acest caz, făcînd o translaţie dată de formulele (16), putem reduce atît q cît şi r la zero, deci ecuaţia devine:

$$y^2 = 2px. \quad (23)$$

Aceasta reprezintă forma canonică la care se reduce ecuaţia unei parabole, curbă ce este reprezentată de figura 14. Presupunînd $p > 0$, punctul $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ se numeşte focarul parabolei, iar dreapta $x = -\frac{p}{2}$ se numeşte directoarea parabolei şi parabola poate fi definită ca loc geometric al punctelor egal depărtate de focar şi de directoare.

Într-adevăr, dacă $M(x, y)$ este un punct al parabolei, distanţa de la M la directoare este dată de formula:

$$\overline{MP} = x + \frac{p}{2},$$

în timp ce distanţa la focar este dată de formula:

$$\overline{MF} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - px + \frac{p^2}{4}}.$$

Astfel că ţinînd seama de ecuaţia parabolei (23), obţinem $\overline{MP} = \overline{MF}$.

Avem deci teorema:

Locul geometric al punctelor egal depărtate de un punct fix şi de o dreaptă fixă este o parabolă.

Ne putem întreba cum se poate deduce din forma generală (19) dacă avem de-a face cu o parabolă. Pentru aceasta vom observa că formulele (20) ne spun că avem:

$$A_{11}A_{22} - A_{12}^2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2.$$

Rezultă deci că expresia

$$I = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$

este un *invariant* la rotaţiile axelor. Cum pentru forma redusă (22') acest invariant este zero, rezultă că el este şi în ecuaţia (19) zero. Deci avem teorema:

Dacă în ecuaţia (18) *avem* $I = 0$, *această ecuaţie reprezintă o parabolă sau două drepte paralele.*

Să revenim acum la cazul în care în ecuaţia (22') atît a_{11} cît şi a_{22} sînt diferiţi de zero, deci la cazul în care I este diferit de zero. Este uşor de văzut atunci că printr-o translaţie (16) putem reduce a_{13} şi a_{23} la zero. Avem deci teorema:

Dacă invariantul I este diferit de zero, printr-o rotaţie şi o translaţie putem face ca ecuaţia de gradul al doilea să fie scrisă sub forma simplă:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0. \quad (24)$$

În acest caz se zice că originea este centrul conicei, iar axele de coordonate sînt axele conicei. Conicele pentru care $I \neq 0$ sînt deci conice cu centru. Se mai spune că sînt conice cu centrul la distanţă finită şi că parabola are *centrul la infinit*[1].

[1] Elementele de la infinit (puncte, drepte, plane) au fost introduse în secolul al XVII-lea de Desargues. Două drepte paralele se spune că se întîlnesc într-un punct la infinit. Un fascicul de drepte paralele determină deci un punct la infinit, aşa cum un fascicul de drepte ce se întîlnesc la distanţa finită determină punctul lor de întîlnire. De asemenea, două plane paralele determină o dreaptă la infinit.

Pentru a vedea ce curbă reprezintă ecuația (24), vom observa că dacă: $a_{33} = 0$, curba reprezintă două drepte ce trec prin origine, reale dacă a_{11}, a_{22} sînt de semne contrare, deci dacă $I < 0$ și imaginare dacă a_{11} și a_{22} sînt de același semn, deci dacă $I > 0$. Să presupunem că $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$, $a_{33} \neq 0$. Putem atunci scrie ecuația (24) sub forma:

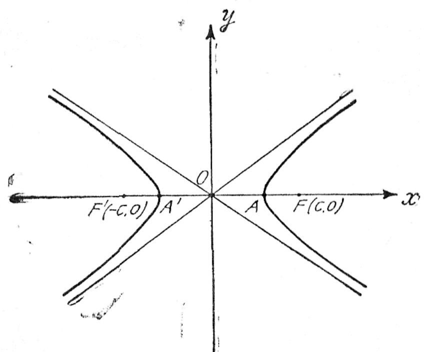


Fig. 15

$$\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n} = 1, \quad m = -\frac{a_{33}}{a_{11}},$$

$$n = -\frac{a_{33}}{a_{22}}. \qquad (24')$$

Această ecuație ne arată că dacă cantitățile m, n sînt pozitive, curba este o elipsă dată de ecuația (13'), iar dacă sînt negative atunci curba este imaginară, se spune că este o elipsă imaginară și se poate scrie sub forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0. \qquad (24'')$$

Hiperbola. Să presupunem că m, n sînt de semne contrare. Atunci putem scrie ecuația (24') schimbînd eventual rolul variabilelor x, y sub forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \qquad (25)$$

care reprezintă ecuația canonică a hiperbolei și curba este reprezentată în fig. 15.

Dreptele date de ecuațiile

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

se numesc asimptotele hiperbolei și sînt tangente la hiperbolă în punctele ei de la infinit, iar punctele $F(c,0)$, $F'(-c,0)$ unde

$$c = \sqrt{a^2 + b^2},$$

sînt focarele hiperbolei. Dacă $b = a$, deci dacă ecuația (25) se scrie:

$$x^2 - y^2 = a^2, \qquad (25')$$

hiperbola se numește echilateră.

Avem deci următoarea teoremă:

Curba (19) reprezintă o elipsă (sau două drepte imaginare), o hiperbolă (sau două drepte reale concurente) după cum invariantul I este pozitiv sau negativ.

Această teoremă era cunoscută de Fermat și de Descartes.

Din cele expuse mai sus rezultă că o conică, dacă nu este formată din două drepte, este o elipsă, o hiperbolă sau o parabolă. În cazul în care conica este formată din două drepte avem o conică degenerată. De altfel, fiind dată ecuația (19), se poate considera ceea ce se cheamă discriminantul sau determinantul acestei ecuații, care se scrie:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (25'')$$

cu convenția că $a_{ij} = a_{ji}$.

Se arată că condiția necesară și suficientă ca ecuația (19) să reprezinte o conică degenerată este ca A să fie zero, rezultat ce era cunoscut de Gauss.

§ 6. SUPRAFEȚE DE GRADUL AL DOILEA

Să considerăm acum suprafețele de gradul al doilea, care sînt definite de ecuația

$$F(x, y, z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + \\ + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \qquad (26)$$

de gradul al doilea în trei variabile x, y, z, unde x, y, z sînt coordonate carteziene ortogonale în spațiu.

Asemenea suprafețe se numesc cuadrice și se clasifică în cuadrice nedegenerate și cuadrice degenerate, după cum determinantul $A = |a_{ij}|$ este diferit de zero sau nu. Prima clasă se împarte în cuadrice cu centru și cuadrice fără centru (cu centru la infinit). Avem patru tipuri de cuadrice cu centrul la distanță finită:

Elipsoidul imaginar care se poate reduce la ecuația

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0. \qquad (26)$$

Elipsoidul real, definit de ecuația:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \qquad (27)$$

a cărui reprezentare se poate vedea în fig. 16. Dacă $a = b = c = R$, atunci ecuaţia (27) se scrie:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

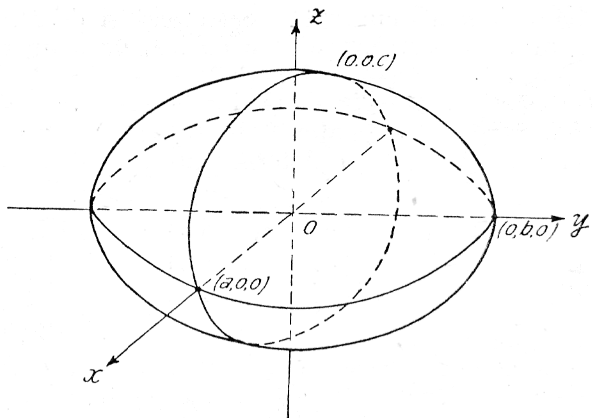


Fig. 16

şi reprezintă ecuaţia unei sfere cu centrul în origine şi cu raza R (fig. 17). Dacă $a = b \neq c$, atunci avem **un** elipsoid de rotaţie.

De asemenea, avem două tipuri de hiperboloizi, hiperboloidul cu o pînză (fig. 18), dat de ecuaţia:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \tag{28}$$

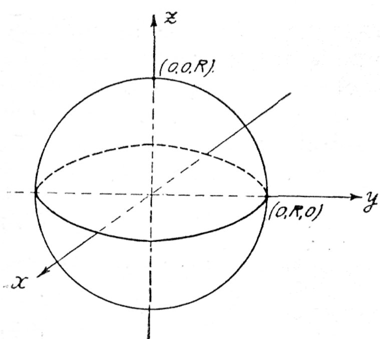


Fig. 17

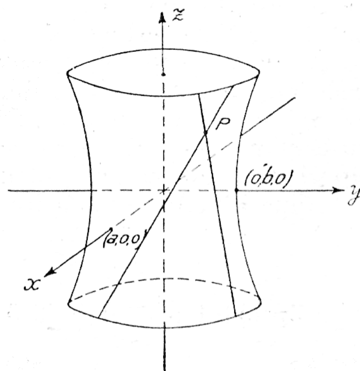


Fig. 18

şi hiperboloidul cu două pînze (fig. 19), ce are ca ecuaţie:

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0. \tag{29}$$

Avem în sfîrşit tipuri de paraboloizi, deci cuadrice cu centrul la infinit, paraboloidul eliptic (fig. 20), dat de ecuaţia:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz, \tag{30}$$

şi paraboloidul hiperbolic (fig. 21), dat de ecuaţia:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz \quad (p < 0). \tag{30'}$$

În ce priveşte cuadricele degenerate, ele sînt conuri reale sau imaginare (fig. 22) care au ca ecuaţie:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 0, \tag{31}$$

sau cilindri eliptici — real sau imaginar — şi cilindrii hiperbolici au ca ecuaţii:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \pm 1, \tag{31'}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{31''}$$

Cilindrul eliptic real şi cel hiperbolic sînt reprezentaţi în fig. 23 şi 24. Există de asemenea cilindrul parabolic, care are ca ecuaţie:

$$y^2 - 2px = 0, \tag{31'''}$$

şi este reprezentat în fig. 25, sau perechi de plane reale sau imaginare conjugate.

Cuadricele de rotaţie erau cunoscute de geometrii greci. Faptul că o ecuaţie de gradul al doilea în spaţiu reprezintă o cuadrică, a fost întrevăzut de Fermat. Demonstrarea acestui fapt revenea la a arăta că orice formă pătratică poate fi adusă la o sumă de pătrate prin transformări ortogonale, rezultat stabilit de Lagrange, Jacobi, Sylvester, Euler şi Cauchy.

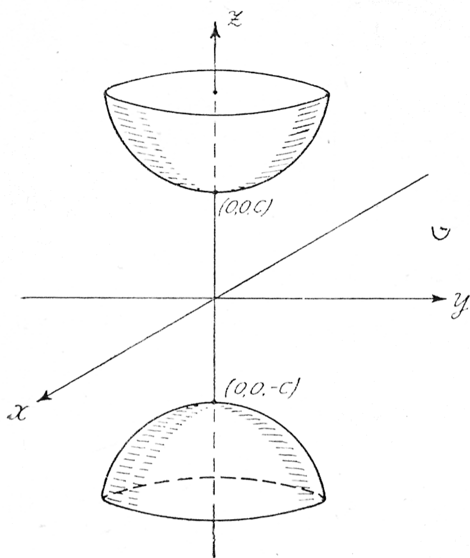


Fig. 19

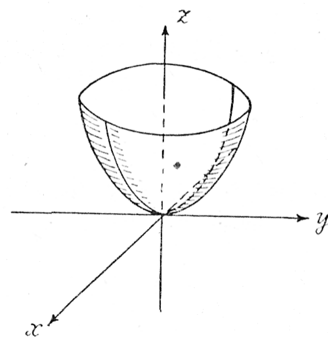


Fig. 20

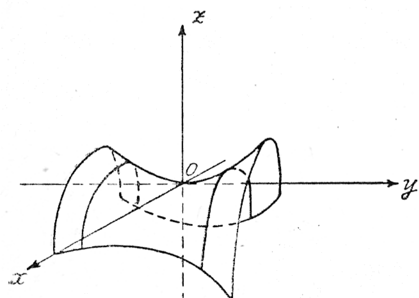


Fig. 21

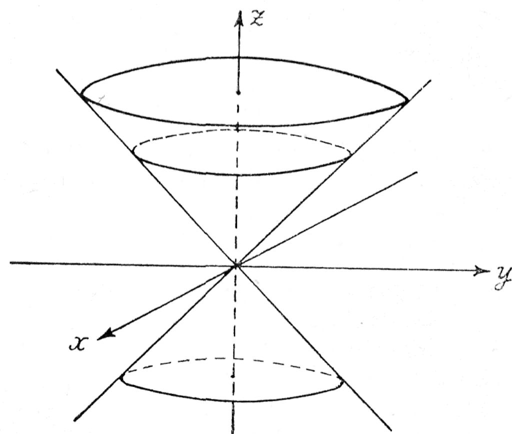


Fig. 22

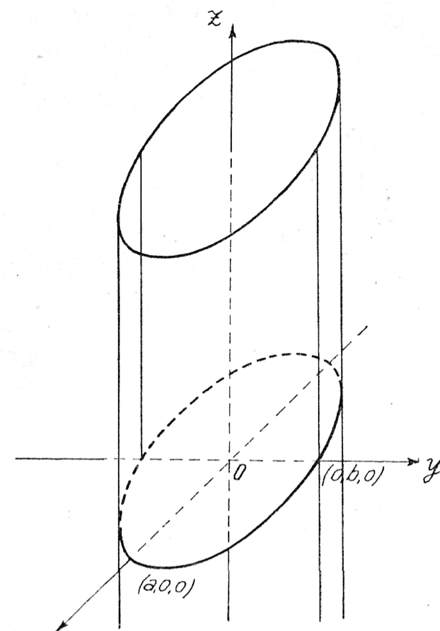


Fig. 23

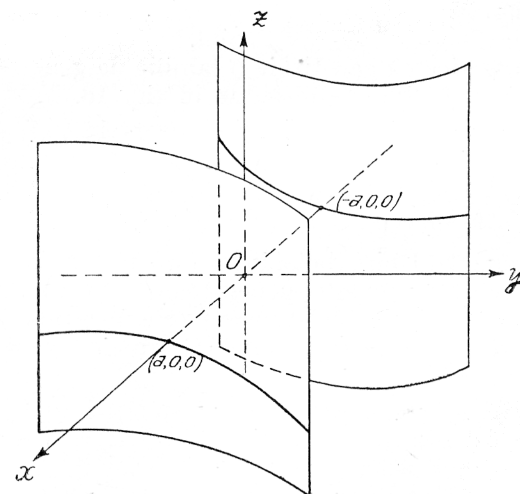


Fig. 24

Vom menţiona o proprietate generală a cuadricelor, aceea de a fi suprafeţe dublu riglate. O suprafaţă se zice riglată dacă conţine pe ea o familie de drepte. Este evident că planele, conurile şi cilindrii sînt suprafeţe riglate. Planele au o infinitate de familii de drepte, în timp ce conurile şi cilindrii au cîte o singură familie; conul este descris de o dreaptă ce trece prin vîrf, iar cilindrul de o dreaptă paralelă cu axa.

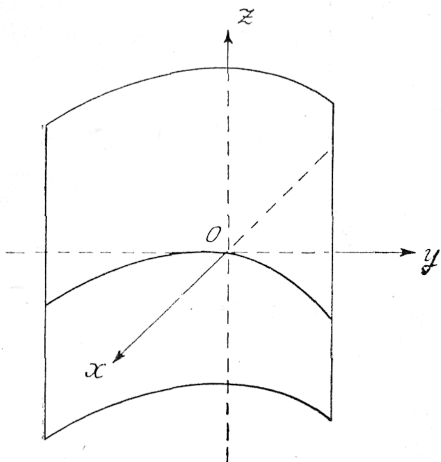


Fig. 25

Celelalte cuadrice, deci elipsoizii, hiperboloizii şi paraboloizii, au cîte două familii de drepte, aceste familii fiind reale numai în cazul hiperboloidului cu o pînză şi a paraboloidului hiperbolic. Astfel, în cazul hiperboloidului cu o pînză, dat de ecuaţia (28), putem satisface această ecuaţie luînd pentru x, y, z soluţii ale sistemului:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = \lambda\left(1 - \dfrac{y}{b}\right), \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = \dfrac{1}{\lambda}\left(1 + \dfrac{y}{b}\right), \end{cases} \qquad (32)$$

unde λ este un parametru variabil.

Dreptele (32) se zice că constituie o familie de generatoare a hiperboloidului cu o pînză (28), reprezentat în fig. 18.

O altă familie se obţine considerînd dreptele

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \mu\left(1 + \frac{y}{b}\right), \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \frac{1}{\mu}\left(1 - \frac{y}{b}\right). \qquad (32')$$

Prin fiecare punct al hiperboloidului (28) trec astfel două generatoare. Planul format de aceste generatoare este planul tangent la hiperboloid în punctul P. Planul tangent taie deci hiperboloidul după aceste generatoare. O proprietate analogă are loc pentru paraboloidul hiperbolic.

Pentru elipsoizi (în particular, pentru sfere), hiperboloizi cu două pînze şi paraboloizi eliptici, generatoarele sînt imaginare şi planul tangent într-un punct atinge suprafaţa numai în acel punct, deci lasă suprafaţa de o aceeaşi parte a planului tangent, ca în cazul particular al unei sfere.

În cazu conurilor şi cilindrilor, planul tangent într-un punct conţine generatoarea trecînd prin acel punct şi planul tangent este acelaşi pentru orice punct al generatoarei. Convenind să spunem că pentru conuri şi cilindri, cele două familii de generatoare sînt confundate, rezultă proprietatea enunţată mai sus că suprafeţele de gradul al doilea sînt suprafeţe dublu riglate. Reciproca este de asemenea adevărată, şi anume orice suprafaţă dublu riglată este de gradul al doilea.

§ 7. PROBLEME GEOMETRICE CELEBRE

Unele din problemele celebre ce i-au preocupat pe geometrii greci au putut fi rezolvate cu ajutorul geometriei. Am spus în paragraful 5 că numele de conice dat elipsei, hiperbolei şi parabolei vine de la faptul că aceste curbe se obţin prin intersecţia unui plan cu un con circular drept, înţelegînd că generatoarele conului sînt prelungite în ambele sensuri (fig. 26). Dacă planul secant taie numai o pînză a conului, atunci obţinem ca secţiune o elipsă sau o parabolă, cînd planul este paralel cu una din generatoare (poziţia *I* sau *II*) din figura alăturată.

Dacă planul taie ambele pînze ale conului se obţine hiperbola (poziţia III).

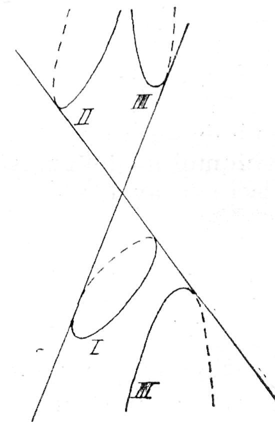


Fig. 26

În ce priveşte denumirile de parabolă, elipsă şi hiperbolă, ele vin de la următoarele trei probleme puse şi rezolvate de Pitagora şi şcoala lui, cu 500 de ani î.e.n.[1]. Prima problemă se enunţa astfel: *Să se facă parabola unei arii.*

Problema revine a spune că fiind dat un segment de lungime $2p$ şi aria y^2, să se construiască un segment x în aşa fel încît dreptunghiul construit pe laturile $2p$ şi x să aibă aria y^2, ceea ce conduce la ecuaţia (23) a parabolei.

Vom menţiona că în limba greacă parabolă înseamnă echivalenţă.

A doua problemă cere să se facă elipsa unei arii, elipsă în limba greacă însemnînd lipsă. Problema constă în faptul că fiind date segmentele $2p$, y şi un număr oarecare m, să se construiască segmentul x în aşa fel, încît aria pătratului de latură y să fie egală cu aria

[1] Vezi. A. M y l l e r, *Curs de geometrie analitică*, pentru elevii clasei a VIII-a, Editura Seminarului Matematic, Iaşi, 1936.

dreptunghiului avînd ca laturi $2p$ și x, mai puțin aria pătratului de latură mx. Avem deci formula:

$$y^2 = 2px - m^2x^2, \tag{33}$$

care reprezintă ecuația unei elipse, deoarece $I = m^2 > 0$. În acest caz determinarea lui x depinde de rezolvarea unei ecuații de gradul al doilea și avem:

$$x = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - m^2y^2}}{m^2}.$$

A treia problemă cere să se facă hiperbola unei arii; hiperbolă în limba greacă însemnînd exces. Problema se reduce la rezolvarea ecuației:

$$y^2 = 2px + m^2x^2, \tag{33'}$$

care reprezintă în variabilele x, y o hiperbolă, deoarece $I = -m^2 < 0$. Avem astfel explicația denumirilor curbelor de gradul al doilea, care mai tîrziu au fost utilizate și la denumirile suprafețelor de gradul al doilea.

Dar să considerăm acum două probleme celebre ce sînt legate de curbe de gradul al treilea și al patrulea.

Prima din aceste probleme este dublarea cubului: fiind dat un cub de latură a, să se construiască un cub de latură x în așa fel, încît volumul noului cub să fie de două ori mai mare decît al vechiului cub, deci să avem:

$$x^3 = 2a^3,$$

ceea ce ne dă

$$x = a\sqrt[3]{2}.$$

Această problemă, numită și problema delică, își are originea în următoarea legendă:

Asupra Atenei se abătuse o molimă care nu putea fi nici cum stăvilită. Fiind consultat oracolul din insula Delos, acesta a răspuns că molima se va stinge atunci cînd atenienii vor dubla altarul cubic din templul închinat lui Apolo. Bucuroși că prețul încetării molimii este atît de mic, atenienii au construit un altar cu o muchie dublă. Dar molima se întindea mai mult. Au cerut din nou sfatul oracolului, care de astă dată le-a dat un răspuns enigmatic: *Cultivați mai mult geometria*. Atunci au înțeles atenienii că ei făcuseră cubul de opt ori mai mare și nu de două ori.

Se poate arăta că problema duplicării cubului se reduce la intersecția a două conice. În adevăr, să considerăm următoarele conice:

$$y^2 = 2ax, \quad xy = 2a^2. \tag{34}$$

Intersecția acestor conice este echivalentă cu găsirea valorilor lui x, y ce satisfac proporțiile:

$$\frac{y}{2a} = \frac{x}{y} = \frac{a}{x},$$

cum este ușor de văzut.

Prima din conicele (34) este evident parabolă. A doua este o hiperbolă echilateră. Într-adevăr, dacă în ecuația (25) presupunem $a = b$ și facem o rotație de axe de 45°, deci facem o transformare de coordonate de forma:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y);$$

ținînd seama că avem:

$$\cos 45° = \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

obținem în noile variabile X, Y, ecuația:

$$2XY = b^2.$$

Deci conica $xy = 2a^2$ rezultă printr-o rotație de axe de 45° din hiperbola echilateră $X^2 - Y^2 = 4a^2$.

De altfel, este ușor de văzut că reprezentarea curbei $xy = 2a^2$ este dată în fig. 27 de curba I și se vede că hiperbola echilateră are ca asimptote chiar axele de coordonate. Să căutăm să rezolvăm ecuațiile (34). Obținem fără dificultate ecuațiile:

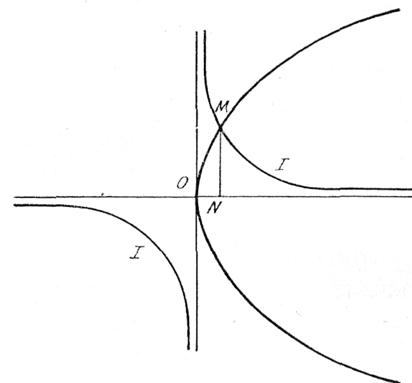


Fig. 27

$$x = \frac{y^2}{2a}, \quad y^3 = 4a^3.$$

Avem deci:

$$y = a\sqrt[3]{4},$$
$$x = a\sqrt[3]{2}; \tag{34'}$$

ultima ecuaţie ne spune că problema delică este rezolvată de abscisa ON a punctului M de intersecţie a conicelor (34).

În mod analog se poate rezolva problema cu alte conice, de exemplu cu o parabolă şi un cerc, date de ecuaţiile:

$$y^2 = 2ax, \quad x^2 + y^2 - 2ax - ay = 0. \qquad (35)$$

O altă problemă celebră studiată de geometrii greci este împărţirea unghiului în trei părţi egale, care de asemenea se reduce la problema intersecţiei a două conice, de exemplu, o parabolă şi un cerc date de ecuaţiile:

$$2x^2 = y, \quad x^2 + y^2 + cx - 2y = 0,$$

unde c este un număr cuprins între -1 şi $+1$.

Ultima ecuaţie dă, ţinînd seama de prima,

$$4x^4 + x^2 + cx - 4x^2 = 0,$$

astfel că împărţind cu x, avem:

$$4x^3 - 3x + c = 0.$$

Punînd $c = \sin\theta$, avem $x = \sin\frac{\theta}{3}$, deoarece este binecunoscută formula trigonometrică:

$$\sin\theta = 3\sin\frac{\theta}{3} - 4\sin^3\frac{\theta}{3},$$

care se obţine din formula lui Moivre:

$$\left(\cos\frac{\theta}{m} + i\sin\frac{\theta}{m}\right)^m = \cos\theta + i\sin\theta$$

pentru $m = 3$.

Cisoida lui Diocles. Să arătăm că problema duplicării cubului poate fi de asemenea legată de o curbă de gradul al treilea.

Fiind dat un cerc, un punct O pe acest cerc şi tangenta în punctul diametral opus A, se duce prin O o dreaptă pe care se ia un punct P, în aşa fel, că:

$$\overline{OP} = \overline{MN}, \qquad (36)$$

M fiind al doilea punct de intersecţie al acestei drepte cu cercul, iar N punctul de intersecţie al dreptei cu tangenta în A (fig. 28).

Locul punctului P astfel obţinut se numeşte *cisoidă*, curbă ce a fost descoperită de geometrul grec Diocles (secolul al II-lea î.e.n.).

Pentru a găsi ecuaţia cisoidei, să luăm ca axă x diametrul prin O al cercului şi ca axă y tangenta în O la cerc. Însemnînd cu ρ şi φ coordonatele polare ale lui P faţă de polul O şi axa x şi ţinînd seama că $\overline{AM}$ este perpendiculară pe dreapta $\overline{OM}$ deoarece triunghiul OAM este înscris într-un cerc ce are latura $\overline{OA}$ ca diametru, avem:

$$\overline{MN} = \overline{AN}\sin\varphi = \overline{OA}\,\mathrm{tg}\,\varphi\sin\varphi.$$

Însemnînd cu a diametrul cercului şi ţinînd seama de ecuaţia de definiţie (36) a cisoidei, obţinem:

$$\rho = a\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi},$$

deci, trecînd la coordonate carteziene, rezultă:

$$(x^2 + y^2)x - ay^2 = 0, \qquad (37)$$

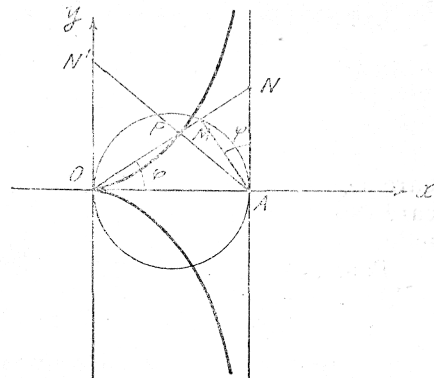


Fig. 28

ceea ce ne spune că cisoida este o curbă algebrică de gradul al treilea. Rezolvînd în raport cu y, avem:

$$y = \pm\sqrt{\frac{x^3}{a - x}}, \qquad (37')$$

de unde se vede că cisoida are puncte reale numai între dreptele $x = 0$, $x = a$, deci între axa y şi tangenta în A la cercul de definiţie. Se vede de asemenea, că originea este un punct al curbei, că această curbă are două ramuri, ea fiind simetrică în raport cu axa x şi că, atunci cînd x creşte de la 0 la a, valoarea pozitivă a lui y creşte de la 0 la ∞. Dreapta $x = a$ este deci o asimptotă a curbei. Originea, în care se întîlnesc cele două ramuri ale curbei, este un punct singular. O dreaptă care trece prin origine

$$y = mx \qquad (37'')$$

întîlneşte curba în trei puncte, din care două sînt confundate în origine. Într-adevăr, ecuaţia (37), în care în loc de y punem mx, ne dă ecuaţia:

$$x^3(1 + m^2) - am^2x^2 = 0. \qquad (38)$$

Rezultă deci că două dintre punctele de intersecţie sînt totdeauna în origine, de aceea originea se numeşte un *punct dublu*.

Cele două ramuri sînt tangente în origine la axa Ox, deoarece raportul $\frac{x}{y}$ dat de ecuaţia (37′) se anulează în origine. Se zice că punctul O este un *punct de întoarcere* al cisoidei şi că axa x este tangenta în punctul de întoarcere.

Coordonatele punctului P de intersecţie a dreptei (37″) cu cisoida sînt date, în virtutea ecuaţiei (38), de formulele:

$$x = \frac{am^2}{1 + m^2}, \quad y = \frac{am^3}{1 + m^2},$$

care ne arată că cisoida este o curbă raţională, deci o curbă pentru care este posibil a găsi o reprezentare parametrică prin funcţii raţionale.

Pentru a vedea cum ne conduce cisoida la rezolvarea problemei dublării cubului, să unim A cu P. Fie N' punctul de intersecţie al acestei drepte cu axa y. Să calculăm $\overline{ON'}$. Pentru aceasta se observă că dreapta $\overline{AP}$ are ecuaţia:

$$y = -m^3(x - a),$$

deci $\overline{ON'} = am^3$. Cum în acelaşi timp $\overline{AN} = ma$, urmează că luînd pe a ca unitate de măsură, avem:

$$\overline{AN} = \sqrt[3]{\overline{ON'}}.$$

Deci avem latura $\overline{AN}$ a unui cub al cărui volum este egal cu volumul cubului construit pe latura $\overline{ON'}$.

În concluzie, fiind dată latura OA a unui cub, se ia pe axa y lungimea ON' egală cu de două ori această latură. Lungimea AN, pe paralela la y, va constitui latura unui cub avînd volumul egal cu dublul cubului dat.

Concoida dreptei. Fiind dată o dreaptă d şi un punct O exterior ei, să ducem prin O o dreaptă care întîlneşte pe d în punctul M (fig. 29). Pe această dreaptă, de o parte şi de alta a lui M, să considerăm două puncte P şi Q, astfel încît să avem relaţia:

$$\overline{PM} = \overline{MQ} = l,$$

l fiind o lungime fixă. Locul geometric al punctelor P, Q, cînd dreapta $\overline{OM}$ se roteşte în jurul lui O, se numeşte *concoida dreptei d*, curbă descoperită de geometrul grec Nicomede.

Pentru a obţine ecuaţia concoidei, să luăm ca origine punctul O, polul concoidei, iar ca axă x perpendiculara pe *dreapta d*, *baza concoidei*. Indicînd cu a distanţa de la pol la bază, ecuaţia concoidei în coordonate polare se scrie:

$$\rho = \frac{a}{\cos\varphi} \pm l, \tag{39}$$

şi pentru a trece la coordonate carteziene, se observă că avem:

$$\rho^2[\rho\cos\varphi - a]^2 = l^2\rho^2\cos^2\varphi,$$

aşadar ecuaţia căutată este:

$$(x^2 + y^2)(x - a)^2 = l^2x^2. \tag{39'}$$

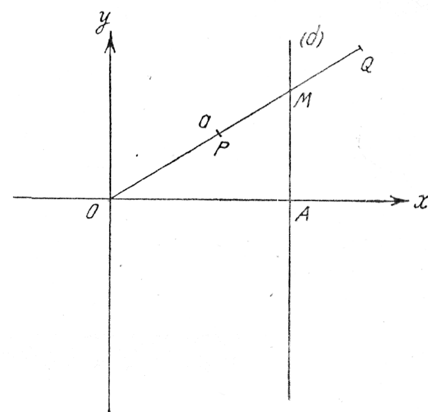


Fig. 29

Concoida este deci o curbă de gradul al patrulea. Rezolvînd în raport cu variabila y, obţinem:

$$y = \pm \frac{x}{x - a}\sqrt{l^2 - (x - a)^2}.$$

Sub această formă se vede că avem puncte reale ale curbei numai pentru valorile lui x cuprinse între $a - l$ şi $a + l$. De asemenea, se vede că dreapta $x = a$, anume baza concoidei este o asimptotă a curbei, adică atunci cînd x se apropie de a, prin valori la stînga ori la dreapta lui a, y creşte în valoare absolută la infinit. Curba are deci, aşa cum rezultă şi din definiţia geometrică, două ramuri: una cuprinsă între dreptele $x = a - l$ şi $x = a$ şi alta între dreptele $x = a$ şi $x = a + l$, aceste ramuri fiind simetrice faţă de axa Ox (fig. 30).

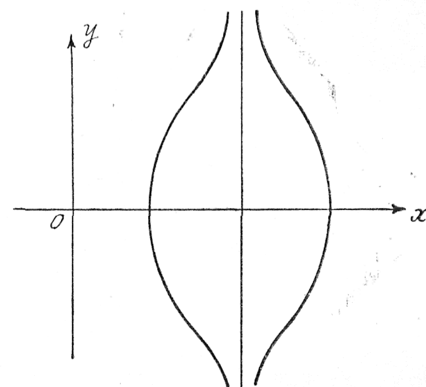


Fig. 30

Intersectînd curba cu o dreaptă care trece prin origine, fie aceasta $y = mx$, abscisele punctelor de intersecţie ale acestei drepte cu curba sînt date de ecuaţia:

$$(1 + m^2)\,x^2(x - a)^2 = l^2x^2,$$

care are întotdeauna două rădăcini nule. Punctul O este deci un punct dublu al curbei. Celelalte două rădăcini sînt date de formula:

$$x = a \pm \frac{l}{\sqrt{1+m^2}}.$$

Dacă m este dat de formula:

$$m = \pm \frac{1}{a}\sqrt{l^2 - a^2},$$

ceea ce poate avea loc numai dacă $l \geqslant a$, dreapta corespunzătoare are trei puncte de intersecție cu curba, confundate în origine. Există două drepte reale avînd aceste proprietăți dacă $l > a$, și una singură dacă $l = a$, anume chiar axa x.

Prin urmare, avem de considerat trei cazuri:

În cazul $l < a$, curba nu trece prin origine, deși coordonatele originii satisfac ecuația curbei. Se zice că originea este un *punct dublu izolat* (fig. 30).

Dacă $l = a$ curba trece prin origine și o ramură a ei are în acest punct o formă analogă cu aceea a cisoidei. Originea este deci un punct de întoarcere pentru concoidă (fig. 31).

În cazul $l > a$, curba are două ramuri care trec prin origine făcînd o buclă sau un nod (fig. 32).

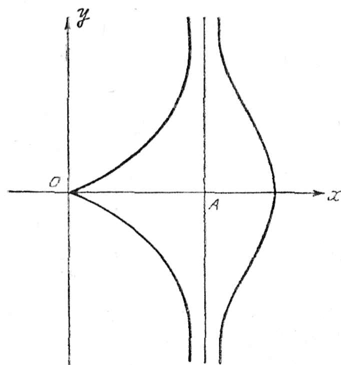


Fig. 31

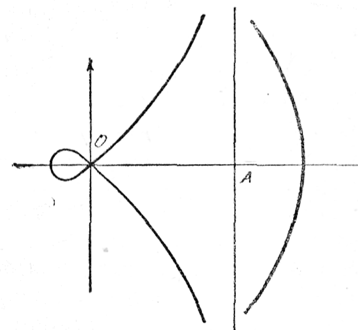


Fig. 32

Să arătăm în continuare cum ne putem servi de concoidă, și anume de ramura cea mai depărtată de pol, pentru a împărți un unghi în trei părți egale. Fie MOA un asemenea unghi (fig. 33). Să ducem $\overline{MA}$ perpendiculară pe $\overline{OA}$ și să considerăm concoida acestei drepte $\overline{MA}$ față de polul O, lungimea l fiind de două ori distanța $\overline{OM}$. Să

ducem prin M o paralelă la $\overline{OA}$ și fie N punctul ei de intersecție cu ramura îndepărtată a concoidei. Unim O cu M și fie S punctul de intersecție al dreptei $\overline{ON}$ cu $\overline{AM}$.

Din proprietatea concoidei vom avea $\overline{SN} = 2\overline{OM}$. Pe de altă parte, $\sphericalangle SMN$ fiind drept, unind pe M cu mijlocul T al lui $\overline{SN}$ vom avea

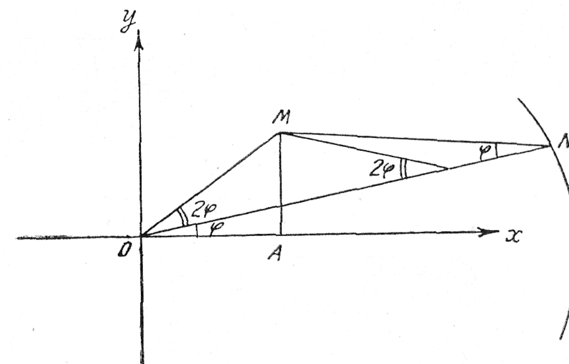


Fig. 33

$\overline{MT} = \overline{ST} = \overline{TN}$ ca raze ale aceluiași cerc trecînd prin S, M, N. Urmează deci că triunghiurile MOT și MTN sînt isoscele și rezultă că $\sphericalangle MTS$, exterior triunghiului MTN, este egal cu suma unghiurilor NMT și TNM, deci este egal cu de două ori $\sphericalangle TNM$. Cum acest unghi este egal cu $\sphericalangle SOA$, notînd $\sphericalangle SOA$ cu φ, rezultă că $\sphericalangle MOS$ este egal cu de două ori φ, ca fiind egal cu $\sphericalangle MTS$. Rezultă că $\sphericalangle SOA$ este egal cu a treia parte din $\sphericalangle MOA$.

Faptul că atît dublarea cubului cît și împărțirea unui unghi în trei părți egale depind de determinarea intersecției unei drepte cu curbe de gradul al treilea și al patrulea și că aceste probleme nu pot fi rezolvate cu rigla și compasul l-a făcut pe Euclid să le omită în teoria mărimilor incomensurabile, expuse de el în Cartea a X-a. Într-adevăr, Euclid consideră rezolvate numai acele probleme ce se reduc la intersecția de drepte și cercuri și prin aceasta el urma un principiu enunțat de Platon. Euclid n-a arătat că problema dublării cubului sau trisecției unghiului nu se poate rezolva cu linia și compasul, deoarece metodele de care dispunea erau insuficiente pentru aceasta. Galois, creînd teoria rezolvării prin radicali a ecuațiilor algebrice, a dat instrumentul prin care s-a putut arăta imposibilitatea rezolvării celor două probleme cu rigla și compasul. În același fel s-a demonstrat că poli-

goanele regulate cu 7 sau 9 laturi ce au fost studiate de arabi nu se pot construi cu rigla și compasul. Euclid construise în Cartea a XIII-a poligoanele regulate cu 3, 4, 5, 6 laturi cu rigla și compasul. Gauss a demonstrat că se poate construi cu rigla și compasul orice poligon regulat al cărui număr de laturi este produsul unei puteri arbitrare a lui 2, cu un produs de factori egali cu 3, 5, 17, 257, 65 537, luați fiecare cel mult o dată. Cu ajutorul teoriei lui Galois s-a arătat că poligonul regulat cu n laturi se poate construi cu rigla și compasul numai dacă n este de forma $2^m p_1 \ldots p_n$, unde $p_1, \ldots, p_n$ sînt numere prime de forma $2^{2^N} + 1$. Numerele $2^{2^N} + 1$ sînt prime pentru $N = 0, 1, 2, 3, 4$, ceea ce corespunde cazului lui Gauss, dar $2^{2^5} + 1$ nu mai este prim, avînd factorul 641.

O altă problemă de construcție celebră, dar a cărei rezolvare nu mai este de natură algebrică, este problema cvadraturii cercului, care cere să se construiască un pătrat avînd aria egală cu aria unui cerc dat. Pentru rezolvarea acestei probleme Arhimede a inventat spirala, dar el n-a reușit să decidă dacă problema este rezolvabilă, sau nu cu rigla și compasul. A reușit totuși să calculeze aria πR^2 a cercului de rază R, deci factorul π, cu o aproximație foarte bună. Această aproximare a obținut-o prin metoda *exhaustivă*, considerînd poligoane regulate înscrise și circumscrise la cerc cu n laturi, cu n din ce în ce mai mare, care se obțin prin extrageri succesive de rădăcini pătrate. Astăzi se știe că problema cvadraturii cercului nu se poate rezolva cu rigla și compasul și nici prin intersecție de curbe algebrice de ordin superior, π fiind la fel ca și e, un număr transcendent.

Teorema lui Fermat[1]. Datorim lui Fermat o altă problemă celebră ce a preocupat pe matematicieni în ultimele trei secole. Această problemă se poate pune în legătură cu teorema lui Pitagora, și anume în legătură cu rezolvarea în numere întregi a ecuației (10'), problemă considerată în § 3. În adevăr, problema lui Fermat cere să se arate că o ecuație de forma

$$x^n + y^n = z^n,$$

unde n este un număr întreg mai mare ca 2, nu are soluții în numere întregi diferite de zero. Problema a fost rezolvată pentru anumite valori a lui n, între care $n = 3$ și $n = 4$ însă a rămas nerezolvată în general, deci pentru orice valori a lui n. Pentru $n = 4$ există o demon-

[1] Pierre Fermat (1601–1665) a rămas celebru prin teorema care-i poartă numele. Fermat a enunțat această teoremă pe marginea cărții lui Diofant cu adaosul: „Dispun de o demonstrație cu adevărat minunată, dar marginile cărții sînt prea înguste ca s-o pot scrie aici."

strație simplă datorită lui Euler[1]. Această demonstrație arată mai întîi că ecuația

$$x^4 + y^4 = z^2 \qquad (39'')$$

nu are soluții întregi toate nenule. Este evident că dacă ecuația lui Fermat

$$\alpha^4 + \beta^4 = \gamma^4$$

ar avea o soluție întreagă (α, β, γ) și ecuația (39'') ar avea ca soluție întreagă

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = \gamma^2.$$

Deci pentru a arăta că teorema lui Fermat este verificată pentru $n = 4$ este suficient să arătăm că ecuația (39'') nu are soluții întregi nenule.

Să observăm că putem presupune că x, y, z sînt numere prime între ele, căci dacă y și z ar avea de exemplu un factor comun, acest factor ar interveni și în x și deci am putea împărți cu el, deci în particular cel puțin unul dintre numerele x, y este impar. Să presupunem x impar și să scriem atunci ecuația (39'') sub forma

$$x^4 = (z - y^2)(z + y^2).$$

Să arătăm că numerele $z - y^2$, $z + y^2$ nu pot să aibă factori comuni. Într-adevăr dacă am avea

$$z - y^2 = kp, z + y^2 = lp,$$

unde p este factorul comun al numerelor $z - y^2$, $z + y^2$, atunci rezultă

$$2z = (k + l)p, \quad 2y^2 = (l - k)p.$$

Deci numerele z și y^2 au în comun factorul p, dacă p este impar și eventual $p/2$ dacă p este par. Cum noi am presupus că z, y nu au factori comuni rezultă că p poate fi cel mult egal cu 2. Însă în acest caz x este divizibil cu 2, ceea ce este în contradicție cu faptul că noi am presupus x impar.

Rezultă deci că dacă un factor q a lui x aparține unuia din numerele $z - y^2$, $z + y^2$ de exemplu lui $z - y^2$ atunci $z - y^2$ conține q^4 deci ecuația (39'') se descompune în ecuațiile

$$z - y^2 = u^4, \quad z + y^2 = v^4, \quad x = uv$$

unde u, v sînt numere întregi impare, prime între ele.

[1] A se vedea Hans Reichardt „*Unmöglichkeitbeweise in der Mathematik*", Mathematik in der Schule, vol. 2, 1964, p. 410–415.

Rezultă deci că avem

$$2z = u^4 + v^4, \quad 2y^2 = v^4 - u^4 = (v^2 + u^2)(v^2 - u^2).$$

Prin considerații asemănătoare rezultă că $v^2 + u^2$ și $v^2 - u^2$ nu pot avea ca factor comun decît factorul 2 și deci avem:

$$v^2 + u^2 = 2s^2, \quad v^2 - u^2 = 4t^2, \quad y = 2st$$

unde s, t sînt numere prime între ele. Aplicînd aceleași considerații ecuației

$$4t^2 = (v - u)(v + u)$$

rezultă că avem

$$v + u = 2a^2, \quad v - u = 2b^2, \quad t = ab$$

unde a, b sînt de asemenea prime între ele. Rezultă deci

$$u = a^2 - b^2, \quad v = a^2 + b^2$$

astfel că ridicînd la pătrat și însumînd obținem

$$a^4 + b^4 = s^2. \tag{39'''}$$

Avem deci teorema:

Dacă x, y, z ar reprezenta o soluție în numere întregi a ecuației (39''), *a, b, s ar reprezenta o soluție în numere întregi a ecuației de aceeași formă* (39''').

Avem însă pentru z formula

$$2z = u^4 + v^4 = 2[a^8 + 6a^4b^4 + b^8]$$

deci avem

$$z = s^4 + 4a^4b^4$$

deci z este mai mare ca s. Acest fapt ne arată că dacă ecuația (39'') s-ar putea rezolva, am obține un șir de ecuații în care z ar avea valori din ce în ce mai mici. Însă pentru valori mici ale variabilei z se vede ușor că ecuația (39'') este imposibilă în numere întregi, ceea ce demonstrează teorema lui Fermat pentru $n = 4$. Să arătăm că pentru $n = 3$, problema rezolvării în numere întregi a ecuației

$$x^3 + y^3 = z^3 \tag{40}$$

revine a arăta că dată fiind curba de gradul al treilea

$$3\alpha^2 + 1 = 4\beta^3, \tag{40'}$$

această curbă nu are alte puncte de coordonate $P(\alpha, \beta)$ raționale decît punctele $A(1, 1)$ și $B(-1, 1)$ care sînt evident soluții ale ecuației (40')[1]. Într-adevăr, să considerăm transformarea de variabile

$$x = \rho\beta, \; y = \rho\frac{\alpha - 1}{2}, \quad z = \rho\frac{\alpha + 1}{2}, \tag{40''}$$

unde ρ este un factor nenul.

Înlocuind în ecuația (40) valorile lui x, y, z de mai sus obținem ecuația (40'), cum se poate vedea ușor. Or această transformare ne dă, presupunînd $z \neq y$ (căci altfel am avea $x = 0$):

$$\rho = z - y, \quad \beta = \frac{x}{z - y}, \quad \alpha = \frac{z + y}{z - y}.$$

Deci avem teorema:

Dacă ecuația (40) *ar avea o soluție întreagă pentru care $y \neq z$, ecuația* (40') *ar avea o soluție rațională și invers.*

Dacă x, y, z sînt numere întregi și $y \neq z$, ultimele formule ne spun că ρ este un număr întreg, în timp ce α, β sînt numere fracționare. Invers, dacă α, β ar fi o soluție rațională a ecuației (40') pentru care $\alpha^2 \neq 1$, altfel sau y, sau z ar fi nuli, formulele (11'') ne spun că x, y, z sînt de asemenea numere raționale, dacă ρ este rațional.

Putem să luăm însă ρ întreg, destul de mare, încît x, y, z să fie întregi, deci teorema este demonstrată.

Să observăm că putem scrie ecuația (40') sub forma:

$$\alpha = \pm\sqrt{\frac{4\beta^3 - 1}{3}}$$

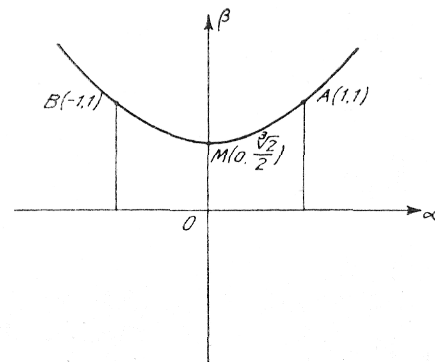


Fig. 34

deci într-un sistem de coordonate $O\alpha\beta$, ecuația (40') reprezintă o curbă dată în fig. 34, care se numește și parabolă cubică.

Teorema lui Fermat pentru $n = 3$ se enunță deci astfel:

Parabola cubică (40') *nu are alte puncte raționale decît punctele A, B.*

---

[1] G. Vrânceanu, *Asupra unei teoreme echivalente cu teorema lui Fermat și observații asupra unei note precedente*, Gazeta Mat. și Fizică, seria A, 8, 1956, p. 23–24 și 1960, p. 1–2.

Rezultă de aici următoarea proprietate:

Dacă β este un număr rațional mai mare decît unu, atunci numărul

$$N = \frac{4\beta^3 - 1}{3}$$

nu este pătratul unui număr rațional.

Revenind la ecuația (40) putem observa că această ecuație reprezintă un con de gradul al treilea, fiind o ecuație omogenă în x, y, z. Dacă $P(x, y, z)$ ar fi o soluție întreagă, ar urma că pe acest con ar exista o generatoare a conului definită de acest punct P și de origine și atunci punctele de forma $(\rho x, \rho y, \rho z)$, unde ρ este un întreg sau un număr rațional, puncte ce aparțin aceleiași generatoare, ar fi soluții ale ecuației (40). Deci ecuația (40) nu poate avea nici soluții raționale, căci atunci ar avea soluții întregi. Putem spune deci în virtutea teoremei lui Fermat:

Conul (40) nu are generatoare raționale în afară de acelea pentru care una dintre cantitățile x, y, z este nulă.

Este interesant de observat că dacă considerăm în loc de (40) ecuația

$$x^3 + y^3 = z^3 + m,$$

unde m este un număr întreg diferit de zero, această ecuație are în general soluții întregi.

Astfel, dacă m este cubul unui întreg n, deci $m = n^3$, avem soluția:

$$x = n, \ y = z,$$

în timp ce dacă $m = -3$, de exemplu, avem soluțiile:

$$x = y = -1, \quad z = 1, \quad x = 5, \quad y = 6, \quad z = 8.$$

Acest fapt se poate exprima spunînd că fiind dat un număr întreg, el se poate scrie în mai multe feluri ca suma a trei cuburi, de numere pozitive sau negative întregi. Problema analogă pentru pătrate nu este însă în general posibilă, deoarece un număr întreg se poate scrie totdeauna ca o sumă de patru pătrate, ceea ce constituie teorema lui Lagrange. O demonstrație a acestei teoreme a fost dată de D. Barbilian, în lucrarea sa *Grupuri cu operatori*[1].

Probleme diofantice. Se numesc probleme diofantice, după numele geometrului grec Diofant, acele probleme ce se referă la rezolvarea

[1] Dan Barbilian, (1895–1962), a fost profesor la Universitatea din București. Matematician de o mare originalitate, are rezultate importante în domeniul geometriei și algebrei.

în numere întregi a unor ecuații. Astfel, rezolvarea ecuației (10') în numere întregi, deci găsirea triunghiurilor dreptunghice cu laturi numere întregi, face parte din categoria problemelor diofantice, și anume este o problemă diofantică de gradul al doilea, în timp ce problema lui Fermat pentru ecuația (40) este o problemă diofantică de gradul al treilea. Desigur, cele mai simple sînt problemele diofantice de gradul întîi și partea cea mai simplă a acestor probleme constă în a arăta că fiind dată o ecuație liniară în două variabile x, y de forma

$$ax + by = 1, \qquad (40''')$$

unde a, b sînt numere întregi, prime între ele, această ecuație admite soluții x, y numere întregi, și anume admite o infinitate numărabilă de asemenea soluții. În adevăr, să observăm în primul rînd că ecuația (40''') reprezintă în planul Oxy o dreaptă, deci problema revine a arăta că pe această dreaptă există o infinitate numărabilă de puncte cu coordonate întregi. Să presupunem că cunoaștem o asemenea soluție (x_0, y_0), deci că avem:

$$ax_0 + by_0 = 1,$$

unde x_0, y_0 sînt numere întregi. O asemenea soluție se găsește imediat dacă a sau b este egal cu 1. De exemplu, dacă $a = 1$, avem:

$$x_0 = 1, \ y_0 = 0.$$

Revenind la cazul general, cînd cunoaștem o soluție (x_0, y_0), să considerăm formulele:

$$x = x_0 + \rho b, \quad y = y_0 - \rho a.$$

Punctul x, y satisface evident ecuația (40''') și reprezintă un punct cu coordonate întregi pentru orice valoare întreagă a lui ρ și proprietatea este demonstrată. Am presupus că a, b sînt primii între ei, deci că nu au factori comuni. Dacă a, b ar avea factori comuni, ecuația (40''') este imposibilă în numere întregi, deoarece primul membru s-ar divide cu factorul comun a lui a și b oricare ar fi x, y întregi, în timp ce al doilea membru este 1.

Considerînd deci a, b primi între ei, putem să presupunem că schimbînd eventual semnul lui x sau y, sau schimbînd x cu y, a și b sînt pozitivi și că $b > a$. Să împărțim atunci b la a. Vom avea o relație de forma:

$$b = ka + r,$$

unde k, r sînt numere întregi pozitive și unde r este un număr mai mic decît a. Introducînd în loc de b, cantitatea $ka + r$, ecuația (40''') se scrie:

$$a(x + ky) + ry = 1.$$

Făcînd transformarea de coordonate

$$X = x + ky,\ Y = y,$$

ecuația diofantică (40''') se transformă în ecuația diofantică

$$aX + rY = 1, \qquad (40^{IV})$$

cu coeficienții mai mari.

Desigur dacă am cunoaște o soluție particulară X_0, Y_0 a acestei ecuații ar rezulta pentru (40''') soluția particulară:

$$x_0 = X_0 - kY_0,\ y_0 = Y_0.$$

Putem scrie imediat o soluție particulară a ecuației (40^{IV}) dacă r este egal cu 1, și anume soluția $Y_0 = 1$, $X_0 = 0$. Dacă r nu este 1 împărțim a la r și avem:

$$a = k_1r + r_1,$$

unde r_1 este mai mic decît r și ne reducem la o ecuație diofantică avînd ca coeficienți r, r_1, deci cu coeficienți mai mici decît (40^{IV}). Este evident că după un număr finit de asemenea operații ajungem la o ecuație diofantică pentru care unul din coeficienți este 1, în care caz știm că obținem o soluție particulară și deci să scriem soluția generală a ecuației (40''').

Se observăm acum că rezolvarea ecuației diofantice (40''') revine a spune că fiind dat, în planul Oxy unde x, y sînt coordonate carteziene ortogonale, un punct de coordonate întregi $P_0(b, -a)$, să se găsească un punct $P(x, y)$ în așa fel ca determinantul

$$\begin{vmatrix} b & -a \\ x & y \end{vmatrix}$$

să fie egal cu unitatea. De asemenea, dacă considerăm triunghiul format de originea O și punctele P_0, P, el are aria dată de determinantul de ordinul al treilea (formula 13')

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ b & -a & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(ax + by) = \frac{1}{2}.$$

Să observăm că fiind date trei puncte oarecare de coordonate întregi $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$, aria triunghiului $P_1P_2P_3$ este de forma $\frac{n}{2}$, unde n este un întreg căci avem:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

și determinantul din membrul al doilea este un număr întreg. Dacă nu este zero, el este cel puțin egal cu 1. Putem spune deci că a rezolva ecuația diofantică (40''') înseamnă a găsi acele puncte de coordonate întregi, care împreună cu O și P_0 să ne dea un triunghi avînd suprafața minimă.

Să considerăm acum totalitatea numerelor întregi din planul Oxy, ce se zice că constituie rețeaua numerelor întregi. Considerînd trei puncte din rețea P_1, P_2, P_3, ce formează un triunghi de arie minimă, în interiorul acestui triunghi nu mai există nici un punct al rețelei, căci dacă P_0 ar fi un asemenea punct, aria lui $P_0P_1P_2$, de exemplu, ar fi mai mică decît aria lui $P_1P_2P_3$, ceea ce nu este posibil. De asemenea, se poate observa că aria unui pătrat format din puncte ale rețelei are suprafața minimă 1 și că un asemenea pătrat nu mai poate avea puncte ale rețelei în interiorul său[1].

Inainte de a termina acest paragraf să expunem unele probleme considerate de matematicienii români în prima jumătate a secolului nostru. Să începem cu o problemă diofantică de ordinul al doilea datorită lui D. Pompeiu[2], problemă care constă în a căuta numerele întregi N pentru care numărul N^2 se termină cu cifrele numărului N. Astfel dacă N este un număr întreg cu n cifre avem

$$N = \alpha_0 + \alpha_1 10 + \ldots + \alpha_{n-1} \cdot 10^{n-1}$$

unde $\alpha_0, \ldots \alpha_{n-1}$ sînt numere de o singură cifră, atunci N^2 este dat de formula

$$N^2 = \alpha_0 + 10\alpha_1 + \ldots + 10^{n-1}\alpha_{n-1} + 10^n\alpha_n + \ldots +$$
$$+ 10^p\alpha_p (p \leqslant 2n-1).$$

[1] Pentru alte probleme geometrice legate de rețeaua numerelor întregi a se vedea: Gabriel Sudan. *Geometrizarea fracțiilor continue*, Editura tehnică, București, 1959.

[2] D. Pompeiu, 1873—1951, a fost profesor la Universitatea din Iași și Universitatea din București, unul dintre matematicienii români cu mare renume.

Rezultă deci că numărul N isface ecuaţia lui Pompeiu

$$N^2 - N = 10^n A \quad (41)$$

unde A este un număr întreg convenabil ales. Această ecuaţie ne spune că trebuie să avem în primul rînd

$$\alpha_0^2 - \alpha_0 = 10a$$

unde a este un număr întreg. Rezultă că α_0 are una dintre valorile 0, 1, 5, 6. Primele două valori sînt compatibile numai cu $N = 0$, 1 şi deci cu $A = 0$, cum se poate verifica uşor. Dacă α_0 este 5 sau 6 se poate arăta că există numere N, N' bine determinate care verifică ecuaţia (41).

Intr-adevăr să presupunem că N are două cifre. În primul caz avem deci $N = 5 + 10\alpha_1$ şi ecuaţia (41) se scrie

$$20 + 10^2\alpha_1 + 10^2\alpha_1^2 - 10\alpha_1 = 10^2 A.$$

Avem deci

$$2 - \alpha_1 + 10[\alpha_1 + \alpha_1^2] = 10A$$

ceea ce ne dă ca unică soluţie

$$\alpha_1 = 2, \; A = 6.$$

În al doilea caz avem $N' = 6 + 10\alpha_1'$ şi ecuaţia (41) devine

$$3 + 11\alpha_1' + 10\alpha_1'^2 = 10A'$$

ceea ce ne dă de asemenea ca unică soluţie

$$\alpha_1' = 7, \qquad A' = 57.$$

Rezultă deci că în cazul în care N este cu două cifre avem ca soluţii ale ecuaţiei (41) respectiv

$$N = 25, \quad A = 6, \quad N' = 76, \quad A' = 57.$$

Presupunem că avem pentru $n > 2$ o soluţie a ecuaţiei (41). Să arătăm că putem obţine o soluţie pentru $n + 1$ de forma

$$\overline{N} = 10^n\alpha + N$$

unde α este un număr pozitiv de o singură cifră.

Într-adevăr înlocuind $\overline{N}$ în ecuaţia (41) obţinem condiţia

$$10^n\alpha^2 + (2N - 1)\alpha + A = 10\overline{A}.$$

Rezultă deci că numărul $(2N - 1)\alpha + A$ trebuie să fie divizibil cu 10. Ţinînd seama că N se termină cu 5 sau 6, rezultă că $2N - 1$ se termină cu 9 sau 1. Dacă α_0 este cifra unităţilor numărului A, rezultă în primul rînd că trebuie să avem $\alpha = \alpha_0$ în timp ce în al doilea trebuie să avem $\alpha = 10 - \alpha_0$. În orice caz A este unic determinat.

Rezultă astfel teorema lui Pompeiu:

Ecuaţia (41) admite pentru orice număr întreg pozitiv n două soluţii întregi de n cifre şi numai două, numărul întreg A fiind convenabil determinat.

Dacă considerăm ecuaţia (41) ca fiind o ecuaţie în două variabile N şi A, această ecuaţie defineşte o parabolă cu axa paralelă cu axa A. Rezultă deci că aceste parabole au numai două soluţii întregi de n cifre în variabila N. Ţinînd seama că pătratul unui număr de n cifre are cel mult $2n$ cifre, rezultă că A este de asemenea un număr cu cel mult n cifre. De altfel să observăm că dacă N, N' sînt cele două soluţii ale ecuaţiei (41), deci avem

$$N^2 - N = 10^n A, \qquad N'^2 - N' = 10^n A' \quad (41')$$

rezultă prin scădere

$$(N' - N)(N' + N - 1) = 10^n(A' - A).$$

Cum $N' - N$ nu este divizibil cu 10, deoarece are pe 1 ca cifră a unităţilor, rezultă că $N' + N - 1$ este divizibil cu 10^n şi cum N', N sînt numere de n cifre trebuie să avem

$$N' + N - 1 = 10^n. \quad (41'')$$

Rezultă deci că suma $N + N'$ este egală cu $1 + 10^n$ şi că avem

$$N' - N = A' - A.$$

Prin urmare dreapta care uneşte punctele $P(N, A)$, $P'(N', A')$ este paralelă cu prima bisectoare.

Adunînd ecuaţiile (41') obţinem

$$(N + N')^2 - 2NN' = N + N' + 10^n(A + A')$$

ecuaţia care ţinînd seama de (41'') se scrie

$$NN' = 10^n(N - A).$$

Rezultă deci că produsul NN' este divizibil cu 10^n. Toate aceste formule ne arată că dacă presupunem N cunoscut rezultă

$$A = \frac{N(N-1)}{10^n}, \quad N' = 10^n\frac{N - A}{N}, \quad A' = A + N' - N$$

deci problema depinde de un singur număr cu N cifre. Astfel dacă $n = 9$ avem ca număr N numărul

$$N = 212\,890\,625$$

şi celelalte numere A', N', A sînt date de formulele precedente.

Ecuaţia (41) se poate generaliza considerînd ecuaţia

$$N^2 - kN = 10^n A$$

unde k este un număr întreg şi se obţine rezultate asemănătoare[1].

O altă problemă datorită lui D. Pompeiu se enunţă prin următoarea teoremă:

Fiind dat în plan un triunghiu echilateral definit de punctele P_1, P_2, P_3 şi un punct oarecare P, distanţele PP_1, PP_2, PP_3 pot fi considerate întotdeauna ca laturi ale unui triunghi[2].

Pentru demonstraţie trebuie să arătăm deci că subsistă inegalităţile

$$PP_i \leqslant PP_j + PP_k. \qquad (41')$$

unde i, j, k iau valorile 1, 2, 3. O demonstraţie analitică simplă a acestui fapt se poate da utilizînd coordonatele complexe $z = x + iy$ unde x, y sînt coordonatele unui punct din plan. In acest caz avem evident identitatea

$$(z - z_1)(z_2 - z_3) + (z - z_2)(z_3 - z_1) + (z - z_3)(z_1 - z_2) = 0$$

unde z_1, z_2, z_3 sînt referitoare la P_1, P_2, P_3. Dacă în această identitate trecem un termen în al doilea membru şi luăm modulele ţinînd seama că modulul unei sume este mai mic sau cel mult egal cu suma modulelor se obţin inegalităţile

$$PP_i \cdot P_jP_k \leqslant PP_jP_iP_k + PP_k \cdot P_iP_j$$

înţelegînd prin P_iP_j lungimea laturii P_iP_j. Rezultă deci că dacă triunghiul $P_1P_2P_3$ este echilateral, sînt verificate condiţiile (41'), deci teorema lui Pompeiu este demonstrată.

Se poate da şi o demonstraţie care constă în construcţia triunghiului format cu PP_1, PP_2, PP_3. Pentru aceasta se roteşte triunghiul P_2P_3P în jurul punctului P_2 cu un unghi de 60° aşa fel ca P_3 să coincidă cu P_1. În această rotire P ia o poziţie P' şi triunghiul P_1PP'

[1] G. Vrănceanu, *Asupra unei ecuaţii aritmetice*, Comunicările Acad. R.S.R., vol. III, 1953, pp. 5–8.

[2] D. Pompeiu, *Une identité entre nombres complexes et un théorème de géométrie elementaire*, Bulletin Mathématique et de Physique de l'École Polytechnique, vol. VI, 1934–35, pp. 6–7.

este triunghiul căutat. În adevăr PP' este latura unui exagon înscris într-un cerc cu centrul în P_2 şi raza P_2P deci PP' este egal cu P_2P. În ceea ce priveşte latura P_1P', este evident egală cu PP_3 căci provine din latura PP_3 prin rotirea considerată.

Sînt şi alte demonstraţii ce se pot da acestei teoreme ce a constituit obiectul multor generalizări importante[1].

§ 8. GEOMETRIE PROIECTIVĂ

Începînd din secolul al **XVIII**-lea, un capitol al geometriei euclidiene a căpătat o mare dezvoltare, devenind o disciplină independentă; este vorba de geometria proiectivă, creată prin lucrările lui Desargues[2], Poncelet[3], Chasles[4] etc.

Să presupunem că pe o dreaptă u considerăm patru puncte distincte A, B, C, D. Se poate forma cu aceste patru puncte ceea ce se numeşte raportul anarmonic sau biraportul $(ABCD)$ al acestor patru puncte punînd:

$$(ABCD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}.$$

Acest biraport are anumite proprietăţi interesante. El nu se schimbă dacă facem o proiecţie a dreptei u pe o altă dreaptă u', dintr-un punct oarecare S situat în planul dreptelor u, u' (fig. 35). Altfel spus, biraportul $(A'B'C'D')$ este egal cu $(ABCD)$. Se spune că biraportul $(ABCD)$ este un invariant al fasciculului de drepte $ABCD$, astfel că punînd $S(ABCD) = \dfrac{\sin \overline{AC}}{\sin \overline{BC}} : \dfrac{\sin \overline{AD}}{\sin \overline{BD}}$, unde $\sin \overline{AC}$ este sinusul unghiului dintre dreptele SA şi SC, se poate demonstra că avem:

$$S(ABCD) = (ABCD).$$

Se zice că biraportul $(ABCD)$ este un invariant proiectiv. Acest invariant nu se schimbă dacă proiectăm dreapta u pe o altă dreaptă

[1] A se vedea de ex. D. Barbilian, Exkurs über die Dreiecke, Bul. Math. 1937.p. 1–62.

[2] Gérard Desargues (1591–1661), inginer din Lyon, ţine la Paris, începînd din 1623, lecţii de perspectivă şi este cunoscut în geometrie mai ales prin teorema lui Desargues.

[3] Victor Poncelet (1788–1867), geometru francez, a luat parte la expediţia lui Napoleon în Rusia în 1812 şi, fiind făcut prizonier, a petrecut cîţiva ani într-un lagăr unde a pus bazele geometriei proiective, utilizînd raportul anarmonic, principiul dualităţii etc.

[4] Michel Chasles (1793–1880) a fost unul dintre geometrii francezi de seamă a timpului său.

u', sau dacă secționăm fasciculul de drepte $S(ABCD)$ cu drepte diferite u, u'. Proprietăți analoge sînt valabile dacă considerăm fasciculul de plane (plane ce trec printr-o dreaptă) și intersectăm aceste plane cu drepte u, u'.

Să revenim la dreapta u și să presupunem că am introdus o coordonată x pe această dreaptă și să notăm cu a, b, c, d coordonatele punctelor A, B, C, D. Avem atunci:

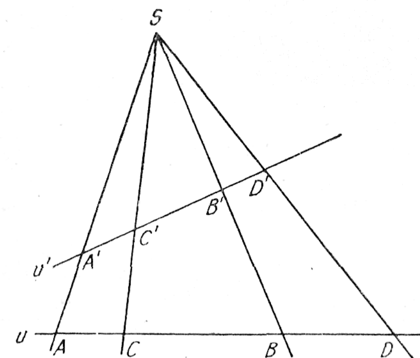


Fig. 35

$$(ABCD) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}.$$

Să presupunem că facem o schimbare de coordonate x, prin formula:

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \qquad (42)$$

unde α, β, γ, δ sînt constante, astfel că $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, deci putem scrie inversa formulei (42)

$$x = \frac{\delta x' - \beta}{-\gamma x' + \alpha}. \qquad (42')$$

Se constată atunci că notînd cu a', b', c', d' coordonatele x' ale punctelor A, B, C, D, avem:

$$(ABCD) = \frac{c'-a'}{c'-b'} : \frac{d'-a'}{d'-b'},$$

deci biraportul nu se schimbă printr-o transformare a coordonatei x dată de formula (42).

Transformările (42) se numesc *transformări proiective* pe dreaptă și se pot interpreta ca transformări între punctele dreptei. Aceste transformări nu păstrează lungimile și pot duce un punct situat la distanță finită la infinit și invers. În adevăr, dacă x tinde la infinit, deci dacă punctul $P(x)$ de pe dreapta u tinde la infinit, punctul $P'(x')$ tinde la punctul $P'\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$, ce este un punct la distanța finită, dacă $\gamma \neq 0$. Ținînd seamă pe de altă parte că punctelor $P(-\infty)$, $P(+\infty)$ le corespunde același punct $P'\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$, se convine a spune că pe dreapta u avem un singur punct la infinit, fie că facem pe x să tindă la infinit prin valori pozitive, fie că facem pe x să tindă la infinit prin valori negative. Dreapta u, formată din punctele ei la distanța finită și dintr-un unic punct la infinit, se zice că formează dreapta proiectivă. Deci avem două concepte de dreaptă, dreapta euclidiană formată din puncte la distanța finită și dreapta proiectivă.

Dreapta euclidiană este deschisă la infinit, în timp ce dreapta proiectivă este închisă, așa cum cercul este o curbă închisă. De altfel, se poate stabili o corespondență biunivocă și continuă între punctele dreptei proiective și punctele cercului, deci o corespondență care la fiecare punct de pe cerc face să corespundă un punct și numai unul de pe dreapta proiectivă, corespondența fiind continuă. În adevăr, dacă φ este un unghi ce determină punctele unui cerc prin formulele $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$ iar X este o coordonată pe o dreaptă proiectivă, putem lua drept o asemenea corespondență biunivocă, corespondența dată de formula:

$$X = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}. \qquad (42'')$$

Această formulă ne dă pentru X o valoare finită dacă φ este cuprins între $-\pi$ și π, extremitățile fiind excluse. Cînd φ ia valorile π sau $-\pi$, x ia valorile ∞, $-\infty$, care însă am convenit că reprezintă punctul P_∞ de pe dreapta proiectivă. Pe cerc unghiul $\varphi = \pi$ și unghiul $\varphi = -\pi$ reprezintă de asemenea un același punct, deoarece aceste valori ale lui φ diferă prin 2π. Corespondența este deci biunivocă și evident și continuă.

Se spune că dreapta proiectivă este echivalentă din punct de vedere topologic cu cercul, în timp ce dreapta euclidiană este echivalentă cu cercul din care am scos un punct.

O transformare (42) realizează o corespondență biunivocă între punctele dreptei proiective u, sau între punctele a două drepte proiective u, u', dacă considerăm x' ca o coordonată pe dreapta u', diferită de u.

Să presupunem că introducem pe dreapta u coordonatele omogene x_1, x_2 punînd

$$x = \frac{x_1}{x_2}. \qquad (42''')$$

Rezultă imediat că aceste coordonate x_1, x_2 sînt determinate de punctele dreptei, deci de coordonata neomogenă x, abstracție făcînd de un factor nenul, deoarece două puncte coincid dacă au coordonatele omogene de forma (x_1, x_2) și $(\lambda x_1, \lambda x_2)$ unde λ este un număr diferit de zero.

De asemenea, rezultă că x_1, x_2 nu pot fi în același timp nuli, căci atunci formula (42''') nu ar putea determina coordonata neomogenă x a punctului. Formula (42''') ne spune că x tinde la infinit dacă x_1 este finit și diferit de zero și dacă x_2 tinde la zero.

Deci în coordonate omogene, punctul P_∞ de pe dreapta u are coordonatele $(x_1, 0)$ cu $x_1 \neq 0$ şi putem, prin înmulţirea cu un factor, să presupunem că P_∞ are coordonatele omogene $(1, 0)$. De asemenea, putem presupune că originea O de pe dreapta u are coordonatele omogene $(0, 1)$. În ce priveşte punctul unitate $A(1)$, el poate fi considerat punctul de coordonate omogene $(1, 1)$ şi în general un punct $P(x)$ poate fi considerat ca avînd coordonatele omogene $(x, 1)$.

Să observăm acum că transformarea proiectivă care păstrează punctele O, P_∞, A este transformarea identică, deoarece trebuie să avem în (42), pentru $x = 0, \infty, 1$ respectiv $x' = 0, \infty, 1$, de unde rezultă

$$\beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \alpha = \delta.$$

Mai general, o transformare proiectivă este determinată dacă se dau trei perechi de puncte corespondente. În adevăr, deşi în formula (42) apar patru constante, ele nu sînt esenţiale, putîndu-se împărţi cu o aceeaşi constantă, fără ca transformarea (42) să se schimbe. Deci transformările (42) depind de trei constante şi pe pe altă parte, fiecare pereche de puncte corespondente P, P' impune o relaţie între aceste constante.

Transformarea (42) formează un grup, grupul proiectiv pe dreaptă, şi am văzut că acest grup conţine trei constante. Se zice că acesta este un grup continuu cu trei parametri.

Dacă utilizăm coordonate omogene, putem scrie formulele (42) sub forma:

$$\begin{aligned} x_1' &= \rho(\alpha x_1 + \beta x_2), \\ x_2' &= \rho(\gamma x_1 + \delta x_2), \end{aligned} \tag{43}$$

unde ρ este un factor de proporţionalitate.

Consideraţii analoge se pot face şi în planul euclidian. Astfel, dacă x, y sînt coordonate carteziene şi dacă punem

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}, \tag{43'}$$

se zice că x_1, x_2, x_3 sînt coordonate omogene ale punctului $P(x, y)$ şi se scrie $P(x_1, x_2, x_3)$. Desigur x_1, x_2, x_3 sînt determinate, abstracţie făcînd de un factor, şi nu pot fi toate nule. Dacă x_3 tinde către zero atunci x sau y tinde către infinit, deci punctele $P(x_1, x_2, 0)$ sînt puncte la infinit. Ţinînd seama de (43'), ecuaţia unei drepte din planul euclidian

$$ax + by + c = 0, \quad (a^2 + b^2 \neq 0)$$

se scrie în coordonate omogene sub forma:

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0, \tag{43''}$$

deci este o ecuaţie liniară şi omogenă în coordonatele x_1, x_2, x_3. Se cuvine a se considera punctele de la infinit, deci punctele satisfăcînd condiţiei

$$x_3 = 0, \tag{43'''}$$

ca fiind situate pe o dreaptă, dreapta de la infinit. Această dreaptă este dată deci de ecuaţia (43'''), care se obţine din (43''), luînd $a = b = 0$, $c = 1$.

Planul euclidian completat cu această dreaptă se zice că constituie planul proiectiv. Planul euclidian este deci deschis la infinit, în timp ce planul proiectiv este închis.

În planul proiectiv este natural a considera transformările de coordonate x_1, x_2, x_3 determinate de o transformare liniară oarecare

$$\begin{aligned} x_1' &= \rho(a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3), \\ x_2' &= \rho(a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3), \\ x_3' &= \rho(a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3), \end{aligned} \tag{44}$$

unde ρ, a, b, c sînt constante şi unde determinantul

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

şi ρ sînt diferiţi de zero. Aceste transformări păstrează forma liniară omogenă a ecuaţiei unei drepte. Rezultă atunci că coordonatele neomogene x, y sînt determinate, abstracţie făcînd de o transformare de forma:

$$x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_3x + b_3y + c_3}, \quad y' = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_3x + b_3y + c_3}. \tag{44'}$$

Totalitatea acestor transformări constituie grupul proiectiv al planului, grup ce depinde de opt constante arbitrare, deoarece putem împărţi şi la numitor şi la numărător cu una dintre constantele a, b, c ce nu este nulă. Proprietăţile planului proiectiv sînt prin definiţie invarianţii acestui grup. În particular sînt invarianţi ai grupului

proiectiv dreptele și rapoartele anarmonice ale grupelor de patru puncte situate pe aceste drepte.

În mod analog, putem considera coordonate omogene în spațiu, punînd

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}$$

și se convine să se spună că punctele la infinit sînt situate într-un plan, care are ecuația $x_4 = 0$. Spațiul euclidian E_3 completat cu acest plan se zice că constituie spațiul proiectiv. Spațiul euclidian este deci deschis la infinit, în timp ce spațiul proiectiv este închis. Grupul proiectiv în spațiu este grupul transformărilor liniare și omogene ale variabilelor x_1, x_2, x_3, x_4, grup care se scrie în coordonatele neomogene x, y, z sub forma:

$$x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{a_4x + b_4y + c_4z + d_4}, \quad y' = \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{a_4x + b_4y + c_4z + d_4},$$
$$z' = \frac{a_3x + b_3y + c_3z + d_3}{a_4x + b_4y + c_4z + d_4} \qquad (45)$$

și este un grup cu 15 parametri.

Denumirea de transformări proiective dată transformărilor (44) și analogelor lor în spațiu provine din următorul fapt. Să numim *proiecție centrală* a unui plan P pe alt plan P' transformarea care asociază fiecărui punct M din planul P intersecția M' a dreptei CM cu planul P', C fiind un punct fix, numit *centrul proiecției*. Dacă x_1, x_2, x_3, x_4 sînt coordonate omogene în spațiu și dacă planele P, P' nu coincid cu nici unul din planele $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, atunci x_1, x_2, x_3 se pot alege drept coordonate omogene în fiecare din aceste plane. În acest caz, proiecția centrală din C a lui P pe planul P' este dată analitic de formule de tipul (44).

Reciproc, se poate arăta că orice transformare definită analitic prin formule de tipul (44), între două plane P, P' din spațiu, se poate obține compunînd trei proiecții centrale, de centre convenabil alese.

Din aceste considerații se vede că geometria proiectivă conține numai o parte a proprietăților geometriei euclidiene și anume acele ce nu se schimbă prin proiecții sau secțiuni și că aceste proprietăți sînt invarianți ai grupului proiectiv.

Geometria afină. S-au studiat și alte geometrii, care consideră invarianții unor subgrupuri ale grupului proiectiv.

O asemenea geometrie a fost studiată de geometrul român

G. Țițeica. Este vorba de geometria centro-afină. În spațiu această geometrie este formată din proprietățile invariante la grupul

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1z \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2z \\ z' &= a_3x + b_3y + c_3z. \end{aligned} \qquad (46)$$

grup ce lasă originea neschimbată. Alte geometrii, corespunzătoare altor subrupuri ale grupului proiectiv, au fost studiate de Școala de geometrie de la Iași, condusă de academicienii Al. Myller și O. Mayer. Aceste geometrii se numesc, după Felix Klein, *geometrii cu grup fundamental*. Printre aceste geometrii se află și geometria conformă, unde există noțiunea de unghi, însă nu există noțiunea de distanță, grupul geometriei fiind format din rotații, translații, similitudini și inversiuni față de sferele spațiului.

În legătură cu această geometrie vom observa că se poate închide planul sau spațiul euclidian, adăugînd la infinit un singur punct și nu o dreaptă sau un plan, cum se face în geometria proiectivă. Acest fapt este în legătură cu o proprietate a sferei. În adevăr, dacă proiectăm o sferă dintr-un punct al său S, pe un plan π care nu trece prin acest punct, se obține o corespondență biunivocă, numită proiecție stereografică între punctele planului și punctele sferei, și anume la orice punct al sferei diferit de S corespunde un punct la distanța finită al planului π și invers (fig. 36). Pentru a avea o corespondență între sfera întreagă și planul π este deci necesar să completăm planul π cu un singur punct P_∞, pe care să-l considerăm corespondentul lui S. Rezultă deci că planul euclidian completat cu un singur punct la infinit este echivalent topologic cu sfera întreagă.

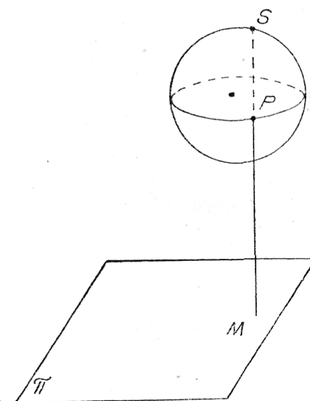


Fig. 36

În mod analog, spațiul euclidian completat cu un singur punct la infinit este echivalent topologic cu sfera $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$ din spațiul euclidian cu patru dimensiuni $E_4(x, y, z, t)$ și proprietatea se extinde pentru spații cu mai multe dimensiuni.

Vom termina capitolul despre geometria eculidiană observînd că în studiul geometriei proiective joacă un mare rol ceea ce se numește principiul dualității.

În planul proiectiv, acest principiu se enunţă spunînd că orice teoremă de geometrie proiectivă rămîne valabilă, dacă se schimbă între ele cuvintele de punct şi dreaptă; în spaţiul proiectiv se schimbă cuvintele de punct şi plan şi se lasă invariant cuvîntul de dreaptă. Pentru a justifica acest principiu în planul proiectiv vom observa că o dreaptă se poate scrie în coordonate omogene

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0 \tag{45}$$

şi se zice că u_1, u_2, u_3 sînt coordonatele omogene ale dreptei. Această ecuaţie poate fi interpretată şi ca ecuaţia unui punct fix $P,(x_1\, x_2, x_3)$ în sensul că ea defineşte totalitatea dreptelor ce trec prin acest punct, condiţia ca dreapta de coordonate u_1, u_2, u_3 să conţină punctul de coordonate omogene x_1, x_2, x_3 fiind date tocmai de ecuaţia (45).

Se zice că x_1, x_2, x_3 sînt coordonate punctuale omogene, în timp ce u_1, u_2, u_3 sînt coordonate tangenţiale omogene. Rezultă deci că atît dreapta cît şi punctul sînt determinate de trei coordonate omogene şi ecuaţia (45) arată condiţia de incidenţă între punct şi dreaptă.

Forme pătratice. Să presupunem acum că avem un spaţiu proiectiv cu n dimensiuni, deci un spaţiu ale cărui puncte sînt definite de $n + 1$ coordonate omogene $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ care sînt definite, abstracţie făcînd de o transformare liniară şi omogenă. Într-un asemenea spaţiu o expresie liniară şi omogenă în variabilele x_i.

$$f = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a_{n+1}x_{n+1} \tag{46}$$

se numeşte o *formă liniară în $n + 1$ variabile,* în timp ce o expresie de gradul al doilea

$$F = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{n+1\ n+1}x_{n+1}^2 \tag{46'}$$

deci o expresie ai cărei termeni sînt fiecare de gradul al doilea în variabilele x_i, se zice o *formă de gradul al doilea în $n + 1$ variabile.* Egalînd cu zero o formă de gradul întîi, se obţine o dreaptă dacă $n = 2$ şi un plan dacă $n = 3$. Se convine a se spune că pentru valori oarecare a lui $n > 3$, ecuaţia $f = 0$ defineşte un *hiperplan,* în timp ce o ecuaţie $F = 0$ defineşte o *hipersuprafaţă.*

Fiind dată o formă f oarecare, putem alege noi coordonate ca f să fie una din variabile, de exemplu x_1. Zicem atunci că f a fost redusă la forma canonică. În mod analog fiind dată o formă pătratică F, ea poate fi redusă prin transformări de variabile la forma canonică:

$$F = \varepsilon_1x_1^2 + \ldots + \varepsilon_{n+1}x_{n+1}^2, \tag{47}$$

unde $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n+1}$ sînt egali cu 1, -1 sau zero. Forma se zice nedegenerată, dacă ε_i sînt toţi diferiţi de zero, ceea ce are loc dacă determinantul $|a_{ij}|$ este diferit de zero.

Proprietatea este evident adevărată cînd $n = 0$, deci dacă:

$$F = ax_1^2.$$

În acest caz, luînd $X_1 = \sqrt{\varepsilon_1 a x_1}$ unde ε_1 este 1 sau -1 după cum a este pozitiv sau negativ, obţinem:

$$F = \varepsilon_1 X_1^2.$$

Să presupunem atunci proprietatea adevărată pentru n variabile şi să arătăm că este adevărată şi pentru $n + 1$ variabile. Se deosebesc două cazuri după cum există în F coeficienţi a_{ii} diferiţi de zero sau nu. În primul caz presupunem $a_{11} \neq 0$. Putem deci scrie:

$$F = a_{11}x_1^2 + 2\sum_{\alpha=2}^{n+1} a_{1\alpha}x_1x_\alpha + \sum_{\alpha,\,\beta=2}^{n+1} a_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta.$$

Să considerăm acum ca noi variabile

$$X_1 = \sqrt{\varepsilon_1 a_{11}}x_1 + \sum_{\alpha=2}^{n+1} \frac{a_{1\alpha}x_\alpha}{\sqrt{\varepsilon_1 a_{11}}}, \quad X_\alpha = x_\alpha (\alpha = 2, \ldots, n + 1),$$

unde ε_1 este 1 dacă a_{11} este pozitiv şi este -1 dacă a_{11} este negativ. În aceste noi variabile forma F se scrie:

$$F = \varepsilon_1 X_1^2 + \Phi,$$

unde Φ este o formă pătratică numai în variabilele X_α, ce sînt în număr de n. Cum noi am presupus că pentru formele în n variabile, proprietatea de reducere la forma canonică este adevărată, rezultă atunci că este adevărată şi pentru $n + 1$.

Să presupunem însă că a_{ii} ar fi nuli. Atunci există cel puţin un coeficient a_{ij} cu $i \neq j$ nenul, căci altfel F ar fi identic egală cu zero.

Putem presupune, schimbînd eventual indicii variabilelor, că avem $a_{12} \neq 0$ şi deci putem scrie:

$$F = 2a_{12}x_1x_2 + 2\sum_{\alpha=3}^{n+1} a_{1\alpha}x_1x_\alpha + 2\sum_{\beta=3}^{n+1} a_{2\beta}x_2x_\beta + \sum_{\alpha,\,\beta=3}^{n+1} a_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta.$$

Luînd atunci ca noi variabile

$$X_1 = a_{12}x_1 + \sum_{\beta=3}^{n+1} a_{2\beta}x_\beta$$

$$X_2 = x_2 + \sum_{\alpha=3}^{n+1} \frac{a_{1\alpha}x_\alpha}{a_{12}}, \quad X_\alpha = x_\alpha(\alpha > 2),$$

forma F devine:

$$F = X_1X_2 + \Phi$$

unde Φ este o formă în $n - 1$ variabile $X_3, \ldots, X_{n+1}$, care am admis că se poate reduce la forma canonică. Cum pe de altă parte punînd

$$X_1 = y_1 - y_2, \; X_2 = y_1 + y_2, \; X_\alpha = y_\alpha,$$

forma F devine

$$F = y_1^2 - y_2^2 + \Phi(y_3, \ldots, y_{n+1}),$$

prin urmare, formula (47) este demonstrată. Rezultă deci că dacă în planul proiectiv ni se dă o curbă de gradul al doilea, deci o conică pe care o putem scrie în coordonate proiective omogene

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j = 0, \tag{48}$$

atunci prin transformarea de coordonate (44) se poate aduce această curbă la forma canonică

$$\varepsilon_1x_1^2 + \varepsilon_2x_2^2 + \varepsilon_3x_3^2 = 0, \tag{48'}$$

unde $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ sînt 1, -1 sau zero. Cantitățile ε sînt toate diferite de zero, dacă determinantul $|a_{ij}|$ al curbei este diferit de zero; în acest caz (46) reprezintă o conică nedegenerată.

Rezultă deci, schimbînd eventual semnul ecuației (46), că avem două forme canonice în planul proiectiv, dacă curba este nedegenerată, și anume sau $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ sînt toți de același semn și atunci avem forma canonică:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \tag{49}$$

și curba este imaginară, sau doi dintre ε sînt de un semn și celălalt de semn contrar și atunci obținem forma canonică

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$$

și avem de-a face cu o curbă reală.

În mod analog o suprafață de gradul al doilea în spațiu, deci o cuadrică, în geometria proiectivă este dată de o ecuație (46') în care apar patru variabile, coordonatele omogene proiective. Printr-o transformare de variabile se poate reduce această cuadrică la forma canonică analogă lui (48'), însă în patru variabile, și cuadrica se zice nedegenerată, dacă $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ sînt toți diferiți de zero, ceea ce are loc dacă determinantul cuadricii este diferit de zero. O cuadrică nedegenerată se poate deci reduce în geometria proiectivă la următoarele forme canonice:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 &= 0, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 &= 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 &= 0. \end{aligned} \tag{50}$$

Vedem deci că în primul caz cuadrica este imaginară, în al doilea caz este o cuadrică riglată imaginar, deci de tipul sferei, în timp ce în al treilea caz avem o cuadrică riglată real (§ 6).

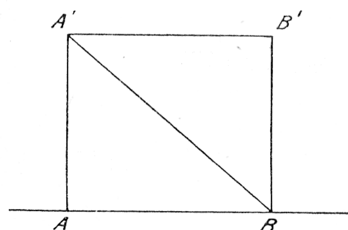
Capitolul II

GEOMETRII NEEUCLIDIENE

§ 1. ÎNCERCĂRI DE DEMONSTRARE A AXIOMEI PARALELELOR

În capitolul I am văzut rolul important pe care-l are axioma paralelelor în demonstrarea multor proprietăţi geometrice. De aceea unii geometri s-au întrebat dacă această axiomă nu ar putea trece în rîndul teoremelor, în care caz caracterul de ştiinţă deductivă a geometriei ar fi considerabil întărit: este probabil că şi Euclid să se fi gîndit la acest lucru, deoarece cum am văzut el utilizează axioma paralelelor, după ce demonstrează o serie de teoreme care nu presupun această axiomă.

Primele încercări de demonstrare a axiomei paralelelor care au condus la o anumită lămurire a problemei au loc în secolul al XVIII-lea şi se datoresc în special matematicienilor Saccheri, Lambert şi Legendre. Cercetările lui Saccheri au fost publicate în 1733, sub titlul *Euclid curăţat de orice pată*. Într-adevăr, Saccheri socotea ca o pată a geometriei lui Euclid faptul că axioma paralelelor nu este demonstrată, şi de aceea el căuta să dea o asemenea demonstrare. Pentru aceasta Saccheri consideră un segment $\overline{AB}$ pe care ridică perpendiculare egale $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ şi apoi uneşte A' cu B'. Figura astfel formată se numeşte patrulaterul lui Saccheri (fig. 37). În acest patrulater unghiurile din A şi din B sînt deci unghiuri drepte. Pe de altă parte, din cauza simetriei se poate admite că şi unghiurile A' şi B' sînt egale. Desigur că dacă se admite axioma paralelelor rezultă că unghiurile A', B' sînt drepte. În adevăr, este deajuns să unim A' cu B şi să considerăm suma unghiurilor patrulaterului $ABB'A'$ care este suma unghiurilor triunghiurilor ABA' şi $BB'A$ şi deci această sumă este egală cu patru unghiuri drepte. Cum A, B sînt unghiuri drepte rezultă că şi A', B' sînt drepte.



Or am văzut în capitolul I că dacă suma unghiurilor într-un triunghi este egală cu două unghiuri drepte, aceasta echivalează cu postulatul paralelelor.

Să presupunem însă că nu admitem axioma paralelelor, ci vrem s-o demonstrăm. Saccheri observă că se pot face trei ipoteze relative la unghiurile A', B': că sînt — obtuze, ascuţite, sau drepte. Dacă am putea să excludem primele două ipoteze, ar rezulta o demonstrare a axiomei paralelelor.

Saccheri arată că prima ipoteză se exclude uşor. În ce priveşte a doua, arată că acceptarea ei ar conduce la rezultate aşa de nenaturale, încît consideră că şi această soluţie se poate exclude, ceea ce însă nu constituie desigur o demonstraţie.

Lambert a expus ideile sale asupra axiomei paralelelor în lucrarea sa *Teoria liniilor paralele* din 1766. Aceste idei se apropie mult, de acele ale lui Saccheri. El consideră un patrulater $ABA'B'$ în care trei unghiuri, şi anume A, B, A', sînt unghiuri drepte (fig. 37). Se poate obţine un asemenea patrulater ridicînd perpendiculare în punctele A şi B şi apoi ducînd pe perpendiculara din A o perpendiculară dintr-un punct B' al perpendicularei în B şi problema revine a demonstra că unghiul B' este şi el drept. Lambert arată că acest unghi nu este obtuz, însă nu demonstrează că el nu poate fi ascuţit.

Spre deosebire de Saccheri, Lambert nu afirmă că ar fi demonstrat postulatul paralelelor şi este interesant de citat următorul paragraf din cartea sa:

„Demonstraţiile postulatului V al lui Euclid pot fi duse atît de departe, încît se pare că nu a rămas decît o nimica toată. Însă dacă am analiza cu atenţie, am observa că în această nimica toată este ascunsă esenţa chestiunii: de obicei ea conţine sau o afirmaţie care trebuie demonstrată sau un postulat echivalent cu postulatul V".

Este de asemenea interesant de observat că Lambert, dezvoltînd sistemul consecinţelor unghiului ascuţit, descoperă o anumită analogie a acestui sistem cu geometria sferică şi în această analogie vede posibilitatea existenţei acestui sistem şi adaugă:

„Sînt chiar înclinat să gîndesc că ipoteza unghiului ascuţit este valabilă pe vreo sferă imaginară. Trebuie să existe o cauză datorită căreia ea nu se lasă dezminţită în plan, aşa cum se poate uşor face cu ipoteza unghiului obtuz".

Relativ la aceste consideraţii ale lui Lambert, este cazul să amintim că fiind dată o sferă, cercurile mari pe această sferă joacă rolul dreptelor din plan, deoarece axele lor reprezintă cel mai drept drum între cele două puncte ale sferei. Este însă uşor de văzut că suma unghiurilor într-un triunghi sferic (format din arce de cercuri mari) este mai mare ca două unghiuri drepte. Astfel pe o sferă reală, deci de rază reală, se verifică ipoteza unghiului obtuz şi de aceea Lambert spune că pe o sferă imaginară se verifică poate ipoteza unghiului ascuţit.

Legendre își publică în 1794 lucrarea sa *Elementele geometriei* în care dă o demonstrație a postulatului V, demonstrație care este mereu schimbată în edițiile ce urmează. Deși nici una din demonstrații nu s-a dovedit a fi corectă, cercetările lui Legendre au dus la rezultate importante, în ce privește stabilirea legăturii între postulatul V și suma unghiurilor unui triunghi, despre care am vorbit și în capitolul I.

Se atribuie lui Legendre următoarea teoremă interesantă, deși această teoremă a fost cunoscută în oarecare măsură de Saccheri și Lambert:

Dacă într-un singur triunghi suma unghiurilor este două unghiuri drepte, atunci orice triunghi are această proprietate.

Rezultă deci că dacă un singur patrulater al lui Saccheri este dreptunghi, toate sînt dreptunghiuri.

Este interesant de observat că în țara noastră învățămîntul geometriei în școlile de inginerie, înființate la începutul secolului al XIX-lea de către Gheorghe Asachi și Gheorghe Lazăr, era făcut mai ales după traducerea[1] cărții lui Legendre, carte care a apărut pînă în 1833, anul cînd a murit Legendre, în peste 20 de ediții, și care a continuat să fie editată și mai tîrziu.

§ 2. PRIMA GEOMETRIE NEEUCLIDIANĂ

Faptul că diferite încercări de demonstrare a postulatului paralelelor au dat greș a făcut să se nască ideea că acest postulat nu poate fi demonstrat, deci că dacă ar fi negat s-ar putea construi o geometrie diferită de geometria lui Euclid. Realizarea acestei idei se datorește matematicianului rus N. I. Lobacevski[2].

Lobacevski a încercat și el la început să demonstreze postulatul lui Euclid, însă dîndu-și seama că acest lucru nu este posibil a pornit la construirea unei geometrii în care acest postulat este înlocuit cu postulatul:

Printr-un punct la o dreaptă într-un plan se pot duce mai multe paralele.

Prima expunere publică asupra acestei noi geometrii a fost făcută de Lobacevski la 12 februarie 1826 în fața Societății de matematică

[1] O traducere a cărții lui Legendre a fost făcută în 1837 de Petrache Poenaru.
[2] Nicolai Ivanovici Lobacevski (1792—1856) a fost profesor și rector al Universității din Kazan.

a Universității din Kazan. Textul expunerii nu s-a păstrat, însă s-a găsit scrisoarea prin care el depune manuscrisul în limba franceză la Secțiunea științelor fizico-matematice.

Scrisoarea are următorul cuprins:

Anexez lucrarea mea intitulată *Expunere prescurtată a principiilor geometrice*. „Doresc să cunosc părerea savanților mei colegi despre această lucrare și, dacă va fi posibil, rog cu respect ca lucrarea propusă de mine să fie primită printre memoriile didactice ale Secțiunii fizico-matematice".

Această scrisoare a rămas multă vreme necunoscută, fiind descoperită abia după o sută de ani, în 1926, în arhiva Universității din Kazan.

Extrase ale expunerii lui Lobacevski au apărut în prima parte a lucrării sale *Principiile geometriei* publicată în 1829—1830 în Buletinul Universității, „Kazanski vestnik".

În 1840, Lobacevski publică, la Berlin, în limba germană o expunere a cercetărilor sale sub titlul *Cercetări geometrice în teoria paralelelor*, în care se referă la prima sa lucrare, publicată în „Kazanski vestnik" în 1829, precum și la alte lucrări.

Lobacevski începe prin a pune la baza geometriei sale 15 din propozițiile enunțate de Euclid: 1. Definiția liniei drepte (o linie dreaptă este egală cu ea însăși în toate pozițiile). 2 Două drepte distincte nu se pot întîlni în două puncte. 3. Linia dreaptă poate fi prelungită oricît. 4. Două drepte perpendiculare pe o a treia nu se întîlnesc etc. Urmează apoi definiția 16, care conține și ipoteza sa asupra liniilor paralele. *Toate liniile drepte, care trec printr-un punct A dintr-un plan, pot fi împărțite în raport cu o altă dreapt CB din plan în două clase: secante și nesecante. Dreptele AH și AH', care separă cele două clase, se numesc paralelele dreptei CB.*

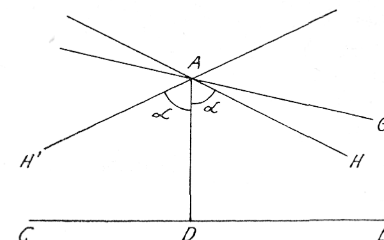


Fig. 38

Unghiul dreptelor AH, AH' (fig. 38) cu perpendiculara AD din A pe CD este notat de Lobacevski cu $\alpha(p)$, p fiind distanța AD; se arată că dreptele AH, AH' sînt simetrice față de AD.

Dacă unghiul $\alpha(p)$ este drept, obținem postulatul paralelelor al lui Euclid și avem o singură paralelă AE la dreapta CB prin punctul A. Dacă unghiul $\alpha(p)$ este mai mic decît un unghi drept, atunci avem două paralele prin A, anume dreptele AH și AH' și o infinitate de drepte AG duse prin A, care nu intersectează dreapta CB.

În ce privește unghiul $\alpha(p)$, se arată că el crește, cînd p descrește și tinde la 90°, cînd p tinde la zero.

În geometria lui Lobacevski suma unghiurilor într-un triunghi este mai mică decît două unghiuri drepte. Să considerăm triunghiul degenerat format din segmentul $\overline{AD}$ și din semidreptele $\overline{DB}$ și $\overline{AH}$. Acest triunghi are ca unghiuri unghiul drept din D, unghiul α din A și unghiul zero, deoarece dreptele DB și AH sînt paralele.

Notînd cu S suma $90 + \alpha$, avem evident $S < 180°$. Dacă variem dreapta AH micșorînd puțin unghiul α se obține o dreaptă ce întîlnește dreapta CB, deci obținem un triunghi veritabil, a cărui sumă a unghiurilor va diferi puțin datorită continuității, de S. Vom obține deci un triunghi în care suma unghiurilor este mai mică ca două unghiuri drepte.

În timp ce Lobacevski construia la Kazan prima geometrie neeuclidiană, la cîteva mii de kilometri distanță, la Timișoara, Janos Bolyai construia aceeași geometrie publicînd prima oară rezultatele sale în 1831 la Tg. Mureș, ca un adaos la o carte de matematici tipărită de tatăl său, Farkaș Bolyai, care studiase la Göttingen și se ocupase și el de teoria paralelelor. Fiind prieten cu Gauss[1], el a considerat necesar să-i trimită acestuia, lucrarea fiului său pentru a-și exprima părerea asupra rezultatului obținut. În răspunsul său, Gauss scrie: „Tot conținutul lucrării, drumul pe care l-a urmat fiul tău și rezultatele pe care le-a obținut corespund aproape în întregime cu meditațiile care le fac de 30—35 de ani" și adaugă: „Într-adevăr, aceasta m-a surprins extraordinar. Am avut intenția ca din munca mea proprie, din care de altfel am pus pînă acum foarte puțin pe hîrtie, să nu public nimic atîta timp cît voi fi în viață, însă intenția mea a fost ca, cu timpul, să scriu totul în așa fel încît să nu piară o dată cu mine. M-a surprins deci foarte mult că tocmai fiul bunului și vechiului meu prieten să fie acela care mi-a luat-o înainte într-un mod atît de uimitor".

De altfel Gauss nu numai că nu a publicat nimic, dar nici nu a luat atitudine publică în legătură cu noua descoperire, pentru că așa cum rezultă din alte scrisori și mărturii ale timpului său, el considera această descoperire o adevărată revoluție în domeniul matematicii, care era de natură să tulbure profund ideile de atunci ale filozofiei și religiei. Dar, după cum se știe el se temea de atacurile

[1] Karl Friedrich Gauss (1777—1855) a fost cel mai mare matematician al timpului său. Este creatorul geometriei diferențiale a suprafețelor și al multor altor domenii ale matematicii.

ce i s-ar fi adus, de „țipetele beoțienilor" — cum spune în una din scrisorile sale.

Este de remarcat că într-o scrisoare din 1824 către Taurinus, elev al lui Gauss ce se ocupa de asemenea de problema paralelelor, Gauss scrie: „Ipoteza că suma celor trei unghiuri (într-un triunghi) este mai mică decît 180° duce la o geometrie deosebită, cu totul diferită de a noastră (euclidiană), geometrie care cu toate acestea este pe deplin consecventă și pe care eu am dezvoltat-o în mod satisfăcător, cu excepția determinării unei constante care nu poate fi obținută apriori. Cu cît este mai mare această constantă, cu atît mai mult ne apropiem de geometria euclidiană și, la o valoare infinită a ei, acestea două coincid. Teoremele acestei geometrii par în parte paradoxale și pentru cei neinițiați, absurde: dar după un examen calm și riguros găsim că ea nu conține nimic imposibil. Așa, de exemplu, cele trei unghiuri ale unui triunghi pot fi oricît de mici dorim, dacă laturile sînt suficient de mari. Cu toate acestea, oricît de mari ar fi laturile, aria triunghiului nu poate depăși o anumită limită, pe care nici măcar nu o poate atinge". Aceste rînduri arată că Gauss obținuse unele rezultate ale geometriei neeuclidiene înainte de a cerceta rezultatele lui Bolyai, și mai tîrziu rezultatele lui Lobacevski, rezultate pe care le-a apreciat așa de mult încît a început să învețe limba rusă pentru a le urmări în original.

Afirmarea primei geometrii neeuclidiene s-a lovit de o rezistență înverșunată din partea multor matematicieni și filozofi. După cum se știe, la începutul secolului al XIX-lea erau admise în filozofie ideile lui Kant, care socotea cunoștințele noastre despre spațiu ca apriorice, nu ca idei rezultate din cunoașterea lumii materiale în care trăim.

Geometria lui Euclid constituia un exemplu de știință deductivă, deci dedusă pe cale logică, dintr-un anumit număr de adevăruri admise apriori. Existența unei alte geometrii decît cea euclidiană tulbura deci bazele filozofiei lui Kant și ale altor concepții idealiste.

Erau însă și alte cauze care frînau dezvoltarea noii geometrii. De exemplu, faptul că teoremele ei erau foarte complicate și, așa cum spunea Gauss, păreau chiar paradoxale. Ele puteau fi urmărite cu mare greutate. Era necesar prin urmare de a privi geometria și spațiul în care trăim dintr-un punct de vedere nou, care să ușureze înțelegerea lucrurilor. Acest punct de vedere nou a fost adus în 1854 de Riemann în lucrarea sa de abilitare ținută la Göttingen în fața unei comisii din care făcea parte și Gauss. Lucrarea avea titlul: *Asupra ipotezelor care stau la baza geometriei*, titlul lucrării fiind propus chiar de Gauss.

§ 3. GEOMETRII RIEMANNIENE

În lucrarea sa Riemann consideră că este esențială în construirea unei geometrii noțiunea de distanță între două puncte foarte apropiate dată de o formulă analogă aceleia a lui Pitagora.

În capitolul I, § 4 am arătat cum într-un plan euclidian se poate introduce un sistem de coordonate ortogonale, astfel că distanța dintre două puncte este dată de formula (11'''). Dacă punem

$$x' = x + dx, \; y' = y + dy, \tag{1}$$

distanța dintre punctele P, P', pe care s-o notăm cu ds, este dată de formula:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2. \tag{2}$$

Să presupunem acum că punctele P, și P' sînt foarte aproape unul de altul, atunci cantitățile dx, dy, deci creșterile ce se dau lui x, y ca să obținem x', y' sînt foarte mici, așa că în calcule putem să neglijăm cantitățile $(dx)^2$, $dxdy$, $(dy)^2$, față de dx, dy. Aceasta revine a spune că dacă avem o cantitate a, foarte mică, puterile ei sînt mult mai mici.

Dacă acum în loc să măsurăm distanța ds între două puncte prin formula (2) o măsurăm cu o formulă de forma

$$ds^2 = adx^2 + 2bdxdy + cdy^2, \tag{3}$$

unde a, b, c sînt funcții de x, y, deci funcții de coordonatele punctului P, avem în general o geometrie diferită de a lui Euclid. Se zice că avem o geometrie a lui Riemann[1]. În această geometrie putem măsura, ca și în geometria lui Euclid, distanțele ds de la un punct $P(x, y)$ la alt punct $Q(x + dx, y + dy)$ prin formula (3). Se zice că formula (3) constituie metrica geometriei. Această metrică permite să calculăm lungimea unui arc de curbă

$$x = f(t), \; y = g(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

prin formula:

$$l = \int_0^1 \sqrt{a(f(t), g(t))f'^2(t) + 2b(f(t), g(t))f'(t)g'(t) + c(f(t), g(t))g'^2(t)}\, dt \tag{3'}$$

[1] B e r n h a r d R i e m a n n (1826—1866), unul dintre cei mai mari matematicieni, care a contribuit prin lucrările sale la progresul geometriei, topologiei, teoriei funcțiilor de variabilă complexă, etc.

și se definește distanța dintre două puncte oarecare P, Q drept marginea inferioară a lungimilor arcelor de curbă ce leagă aceste puncte.

Dacă $a = c = 1$ și $b = 0$, deci dacă metrica (3) coincide cu (2), atunci lungimile minime sînt realizate de segmentele de dreaptă. Pentru un astfel de segment

$$x = x_0 + t(x_1 - x_0), \; y = y_0 + t(y_1 - y_0) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1),$$

formula (3') devine, punînd $a = c = 1$, $b = 0$:

$$l = \int_0^1 \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}dt = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

și reprezintă distanța euclidiană dintre punctele $P(x_0, y_0)$, $Q(x_1, y_1)$. Metrici de forma (3) au fost considerate, înaintea lui Riemann, de Gauss, în legătură cu calculul lungimilor pe suprafețele din spațiul obișnuit. Riemann cunoscînd cercetările lui Gauss a căutat principiile cu care să se poată stabili structura spațiului în care trăim. Astfel, el considera ca elemente fundamentale ale spațiului acelea de punct și de lungime și și-a propus să determine modul în care poate depinde lungimea unei curbe de poziția curbei în spațiu.

Presupunînd că spațiul este cu n dimensiuni, deci că este necesară cunoașterea a n mărimi pentru a determina poziția unui punct în spațiu, el a indicat prin considerații geometrice ingenioase ca o generalizare naturală a spațiului euclidian, cazul în care pătratul distanței între două puncte vecine ale spațiului trebuie să fie o formă pătratică pozitiv definită în diferențele coordonatelor celor două puncte, coeficienții ei depinzînd de aceste coordonate.

Ideea de spațiu cu n dimensiuni apăruse în lucrările lui Cayley[1] și ale lui Grassmann, primul studiind astfel de spații analitic, iar al doilea — prin considerații geometrice. Spațiile cu n dimensiuni au găsit aplicații importante în lucrările lui Lagrange privind mecanica sistemelor de puncte materiale. Într-adevăr, un sistem de N puncte materiale $P_i(x_i, y_i, z_i)(i = 1, \ldots, N)$ are poziția determinată dacă se cunosc $3N - p$ parametri, deci pozițiile lui posibile pot fi interpretate ca puncte ale unui spațiu cu $n = 3N - p$ dimensiuni. În ce privește energia cinetică

$$T = \frac{1}{2} a_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j \left(\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}\right)$$

[1] A r t h u r, C a y l e y (1821—1895), matematician englez care a adus contribuții importante în geometrie, algebră, teoria funcțiilor etc.

a sistemului, dacă o înmulțim cu de două ori pătratul variației timpului, deci cu $2dt^2$, obținem o expresie de tipul aceleia considerate de Riemann

$$ds^2 = a_{ij}dx^i dx^j$$

ca metrică a spațiului cu n dimensiuni. Analogia merge însă mai departe. Dacă asupra sistemului mecanic nu acționează forțe exterioare, traiectoriile sistemului mecanic sînt soluții ale ecuațiilor lui Lagrange[1]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial x^i} = 0 \qquad (3'')$$

și aceste ecuații reprezintă în același timp ecuațiile geodezicilor spațiului lui Riemann corespunzător.

Dacă sîntem în cazul unui punct în mișcare în spațiul euclidian raportat la coordonate carteziene ortogonale, atunci forța vie este dată de formula:

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

și prin urmare ecuațiile lui Lagrange se scriu:

$$\ddot{x} = 0, \ \ddot{y} = 0, \ \ddot{z} = 0,$$

astfel că integrînd, căpătăm:

$$x = a_1 t + b_1, \ y = a_2 t + b_2, \ z = a_3 t + b_3,$$

unde a, b sînt constante. Obținem deci ca geodezice dreptele spațiului euclidian.

Dar să revenim la metrica (3). Dacă notăm cu $R(x + \delta x, y + \delta y)$ un alt punct apropiat de P, (fig. 39) unde δx, δy sînt alte creșteri date variabilelor x, y și dacă notăm cu δs distanța între P și R, deci dacă avem:

$$\delta s^2 = a\delta x^2 + 2b\delta x \delta y + c\delta y^2,$$

atunci putem defini unghiul φ între segmentele PQ, PR prin formula:

$$\cos\varphi = \frac{adx\delta x + b(dx\delta y + dy\delta x) + cdy\delta y}{ds\,\delta s} \qquad (4)$$

[1] Joseph Louis Lagrange (1736–1833) a trăit la Torino, l-a urmat pe Euler la Berlin și a lucrat la Paris din 1787. Este unul dintre marii matematicieni francezi, fondator al mecanicii analitice.

și este ușor de văzut că această formulă generalizează formula (13″) din capitolul I, care are loc în geometria lui Euclid. Se observă că distanța ds dintre două puncte distincte P, Q este un număr pozitiv dacă membrul al doilea al formulei (3) este o formă pătratică pozitiv definită. Altfel, ds poate să fie zero sau imaginar. De asemenea, membrul al doilea al formulei (4) poate să nu fie cuprins între -1 și $+1$, deci unghiul φ să nu fie real, ceea ce ne depărtează mult de geometria lui Euclid. Planele lui Riemann pentru care membrul al doilea al formulei (3) este totdeauna pozitiv se zic plane ale lui Riemann cu metrică definită pozitivă, metrica fiind dată de formula (3). Pentru aceste plane formula (4) ne definește întotdeauna fără ambiguitate unghiul între două segmente, căci numitorul $ds\ \delta s$ al formulei (4) nu poate fi nul și se poate vedea ușor că membrul al doilea al formulei (4) este cuprins între -1 și $+1$ și deci unghiul φ există.

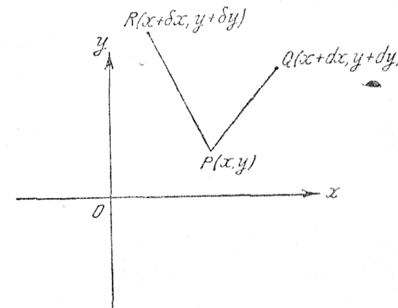


Fig. 39

Să ne întrebăm acum în ce condiții formula (3) definește o geometrie a lui Euclid. Pentru aceasta trebuie să existe o transformare de coordonate, să zicem

$$X = f(x, y), \ Y = \varphi(x, y),$$

în așa fel ca prin această transformare formula (3) să treacă la formula (2), deci să avem:

$$dX^2 + dY^2 = adx^2 + 2bdxdy + cdy^2.$$

Se arată că pentru ca acest lucru să fie posibil trebuie ca o anumită cantitate K, formată cu a, b, c și derivatele lor de primul și al doilea ordin, să se anuleze. Această cantitate K coincide cu ceea ce am numit în introducere curbura lui Gauss a metricei (3). Rezultă deci că planul lui Riemann coincide cu acela al lui Euclid, dacă curbura sa este zero.

Să observăm de asemenea că fiind dată formula (3) putem întotdeauna să alegem coordonatele x, y în așa fel ca b să fie zero, ceea ce revine a alege un sistem de coordonate ortogonale. În adevăr, în baza formulei (4), dacă segmentul PQ este paralel cu axa x, deci dacă $dy = 0$ și dacă segmentul PR este paralel cu axa y, deci dacă $\delta x = 0$, avem $\cos\varphi = \frac{b\,dx\,\delta y}{ds\,\delta s}$, deci $\varphi = 90°$, dacă $b = 0$. Se poate presu-

pune întotdeauna că metrica planului lui Riemann este dată de formula:

$$ds^2 = a^2dx^2 + b^2dy^2, \tag{5}$$

dacă această metrică este pozitiv definită, unde a, b sînt funcţii pozitive de variabilele x, y ce nu se anulează, cel puţin într-o regiune a planului. Se zice că în acea regiune metrica este regulată. De asemenea, fiind dat un punct fix, de exemplu originea, putem să alegem coordonatele x, y în aşa fel ca în origine să avem $a = 1$, $b = 1$, deci formula (5) devine:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + \ldots,$$

termenii nescrişi anulîndu-se în origine. Aceasta arată că în apropierea originii, planul lui Riemann coincide, din punctul de vedere al măsurării distanţelor, într-un punct, cu planul lui Euclid, ceea ce se exprimă spunînd că într-o primă aproximaţie geometria lui Riemann coincide cu aceea a lui Euclid.

Se arată că formula (5) poate fi încă simplificată, alegînd coordonatele x, y în aşa fel încît $b = 1$, deci ca să avem:

$$ds^2 = a^2dx^2 + dy^2, \tag{6}$$

unde a este o funcţie de variabilele x, y. Dacă a este o constantă, atunci luînd ax ca nouă variabilă x, obţinem metrica (2) a lui Euclid. Dacă $a = ky + l$ unde k, l, sînt constante, de asemenea se arată că putem lua noi variabile pentru a obţine metrica lui Euclid.

Pentru metrica (6) curbura K este de altfel dată de formula:

$$K = -\frac{a''}{a}, \tag{7}$$

unde a'' este derivata a doua a lui a în raport cu variabila y. Planul lui Riemann coincide cu planul lui Euclid dacă $K = 0$, deci atunci cînd a este o funcţie liniară de y. Prin urmare, planul în care avem o metrică (6), unde a nu este o funcţie liniară de y, este un plan al lui Riemann cu curbură diferită de zero, deci diferit de un plan al lui Euclid.

Am văzut că în planul lui Euclid există un grup de mişcări cu trei parametri [cap. I, § 4, formulele (15)], grup care permite să ducem un segment dintr-un loc în altul şi să-l comparăm cu alt segment, sau să suprapunem două figuri egale printr-o translaţie şi o rotaţie. Or se arată că un plan al lui Riemann are şi el această proprietate numai dacă curbura K este o constantă şi avem două cazuri de considerat, după cum această constantă este pozitivă sau negativă.

Putem pune în primul caz $K = \frac{1}{R^2}$ şi în al doilea caz $K = -\frac{1}{R^2}$, unde R este o constantă pozitivă. Formula (7) ne dă în primul caz pentru a valorile $\sin\frac{y}{R}$ sau $\cos\frac{y}{R}$ sau în general

$$a = A\sin\frac{y}{R} + B\cos\frac{y}{R}, \tag{7'}$$

unde A, B sînt constante oarecare, în timp ce în al doilea caz obţinem:

$$a = Ae^{\frac{y}{R}} + Be^{-\frac{y}{R}}, \tag{7''}$$

unde e este numărul iraţional definit în capitolul I, § 4, formula (11).

§ 4. MODELE ALE GEOMETRIEI LUI LOBACEVSKI-BOLYAI

Să considerăm planul lui Riemann pentru care curbura K este o constantă negativă şi a cărui metrică este dată de formula:

$$ds^2 = e^{-\frac{2y}{R}}dx^2 + dy^2. \tag{8}$$

Această metrică este regulată pentru orice valori finite ale variabilelor x, y şi tinde la metrica (2) a lui Euclid, cînd R tinde la infinit.

Să observăm acum că pentru metrica lui Euclid (2) drumurile cele mai scurte sînt liniile drepte, deci sînt date de ecuaţiile (12'), (12'') din capitolul I.

În cazul metricei (8), drumurile cele mai scurte sînt sau dreptele paralele cu axa Oy, date de ecuaţiile:

$$x = c, \tag{8'}$$

unde c este o constantă oarecare, sau curbele date de ecuaţiile[1]:

$$(x - m)^2 + R^2e^{\frac{2y}{R}} = n^2, \tag{9}$$

ceea ce rezultă utilizînd ecuaţiile (3'') ale lui Lagrange. În ecuaţia (9) m este o constantă oarecare, iar n un număr pozitiv. Se vede uşor că aceste curbe au forma dată în fig. 40.

[1] Pentru demonstraţie, vezi G. Vrănceanu, *op. cit.*, cap XVIII.

Ținînd seama că putem scrie ecuația (9) sub forma:

$$R^2 e^{\frac{2y}{R}} = (n + x - m)(n - x + m),$$

rezultă că o asemenea curbă, pe care o putem nota $C(m, n)$, este situată în regiunea planului cuprinsă între dreptele paralele cu axa Oy și date de ecuațiile:

$$x = m - n, \quad x = m + n. \tag{9'}$$

Notînd această regiune cu $R(m - n, m + n)$, rezultă că ea definește complet curba $C(m, n)$, deoarece depinde de aceiași parametri m, n.

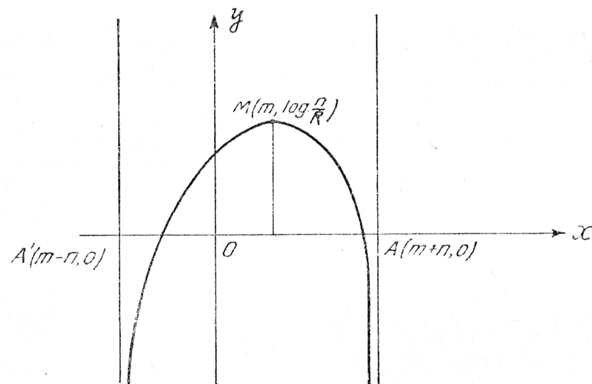


Fig. 40

Vom observa, de asemenea, că fiecare curbă $C(m, n)$ are un maxim în punctul $x = m$, acest maxim fiind definit de ecuația:

$$y = R \log \frac{n}{R}\cdot$$

Rezultă deci că maximul este pozitiv dacă $n > R$, este zero dacă $n = R$ și este negativ dacă $n < R$.

Curbele $C(m, n)$ au comun cu dreptele proprietatea de a se întinde la infinit în ambele sensuri. Vom arăta în continuare că două curbe (8') sau (9) se întîlnesc cel mult într-un punct. În adevăr, două curbe (8') nu se întîlnesc în nici un punct afară de cazul în care sînt confundate. Dacă avem o curbă (8') și o curbă (9), ele se întîlnesc într-un punct la distanță finită dacă

$$m - n < c < m + n;$$

ele sînt paralele (se întîlnesc la infinit) dacă $m - n = c$ sau $m + n = c$ și nu se întîlnesc în celelalte cazuri.

Să considerăm acum două curbe (9), deci două curbe $C(m, n)$, $C(m', n')$

$$(x - m)^2 + R^2 e^{\frac{2y}{R}} = n^2, \quad (x - m')^2 + R^2 e^{\frac{2y}{R}} = n'^2. \tag{10}$$

Dacă scădem membru cu membru aceste ecuații, obținem:

$$2(m' - m)x + m^2 - m'^2 = n^2 - n'^2,$$

ceea ce ne dă o singură valoare pentru x, dacă m' este diferit de m. Dacă $m' = m$ și dacă n' este diferit de n, curbele nu se întîlnesc și sînt confundate dacă $n' = n$. Să presupunem m', diferit de m. Avem atunci pentru x valoarea

$$x = \frac{m + m'}{2} + \frac{n^2 - n'^2}{2(m' - m)} \tag{11}$$

În acest caz prima ecuație (10)rezolvată în raport cu y se scrie:

$$y = R \log \frac{\sqrt{n^2 - (x - m)^2}}{R}$$

și ne dă o valoare reală pentru y, dacă cantitatea $n^2 - (x - m)^2$, în care x este dat de formula (11), este o cantitate pozitivă.

Rezultă deci că cele două curbe se întîlnesc cel mult într-un punct și este ușor de văzut pe fig. 40, că cele două curbe se întîlnesc dacă regiunile $R(m - n, m + n)$, $R'(m' - n', m' + n')$ au puncte comune și nu se întîlnesc, dacă aceste regiuni nu au puncte comune sau dacă una este interioară celeilalte.

Să presupunem că ne este dată o curbă (8') sau (9) și un punct oarecare P_0 (x_0, y_0) ce nu se găsește pe curbă. Prin acest punct trec o infinitate de curbe $C(m', n')$; pentru aceste curbe m, n satisfac ecuația:

$$(x_0 - m')^2 + R^2 e^{\frac{2y_0}{R}} = n'^2,$$

astfel că putem lua:

$$m' = x_0 + R e^{\frac{y_0}{R}} \operatorname{tg} \theta, \quad n' = \frac{R e^{\frac{y_0}{R}}}{\cos \theta}, \tag{12}$$

unde θ este un unghi care variază între $-90°$ și $90°$, ceea ce ne asigură că n' este pozitiv.

Regiunea $R'(m' - n', m' + n')$ a unei curbe $C(m', n')$ este deci cuprinsă între dreptele:

$$x = x_0 + Re^{\frac{y_0}{R}} \frac{\sin\theta - 1}{\cos\theta}, \quad x = x_0 + Re^{\frac{y_0}{R}} \frac{\sin\theta + 1}{\cos\theta}, \tag{13}$$

Atunci cînd θ ia valorile extreme $-\frac{\pi}{2}$ sau $\frac{\pi}{2}$, această regiune cuprinde un semiplan, deoarece una din dreptele (13) este $x = x_0$, iar alta $x = \infty$. Rezultă deci că există o infinitate de curbe $C(m', n')$ ce trec prin P_0, care întîlnesc o curbă (8') sau (9) dată și o infinitate ce nu o întîlnesc. Aceste curbe sînt separate de curbele pentru care una din dreptele (13) coincide cu dreapta (8') sau cu una din dreptele (9').

Rezultă deci că în această geometrie se verifică axioma paralelelor a lui Lobacevski (§ 2, fig. 38).

În concluzie putem enunța teorema:

Dacă într-un plan se ia ca lege de măsurare a distanțelor formula (8), atunci dreptele acestei geometrii sînt date de formulele (8') și (9) și în acest plan se verifică axioma paralelelor a lui Lobacevski.

Se spune că planul dotat cu metrica (8) constituie un model al planului geometriei neeuclidiene a lui Lobacevski-Bolyai.

Există și alte modele ale geometriei planului lui Lobacevski. Unul dintre acestea este așa-numitul semiplan al lui Poincaré[1]. Pentru a obține acest model din cel considerat mai sus, observăm că ecuațiile (9) devin ecuațiile unor cercuri dacă facem schimbarea de coordonate:

$$x = u, \quad Re^{\frac{y}{R}} = v. \tag{14}$$

În noile coordonate u, v, ecuațiile (8') se păstrează, în timp ce ecuațiile (9) se scriu:

$$(u - m)^2 + v^2 = n^2 \tag{15}$$

și reprezintă cercuri cu centrele pe axa u, deci cercuri ortogonale acestei axe.

Trebuie să observăm însă că formulele (14) ne dau numai valorile pozitive ale lui v, prin urmare întreg planul x, y se transformă în semiplanul $v > 0$, deci curbele (9) se transformă în semicercuri, anume în

[1] H. Poincaré (1854 - 1912) este socotit cel mai mare matematician al timpurilor noastre. Împreună cu Riemann el a întemeiat topologia. Lucrările sale în mecanica cerească, în ecuații diferențiale etc. au creat domenii noi.

acele părți ale cercurilor (15) ce sînt deasupra axei v. De altfel, utilizînd transformarea (14), formula (8) se scrie:

$$ds^2 = R^2 \frac{du^2 + dv^2}{v^2} \tag{16}$$

și constituie o metrică regulată pentru $v > 0$, punctele pentru care $v = 0$ constituind infinitul geometriei.

Luînd deci un sistem de axe Ωuv într-un plan și considerînd punctele pentru care $v > 0$, se obține o geometrie a lui Lobacevski dacă măsurăm distanțele cu formula (16) și considerăm deci ca drepte ale geometriei semicercurile (15)[1].

Este atunci ușor de văzut că fiind dată o dreaptă a geometriei (deci o dreaptă paralelă cu axa v sau un semicerc ortogonal axei u), printr-un punct P din semiplanul superior trec o infinitate de semicercuri care întîlnesc sau nu dreapta dată, deci se verifică axioma paralelelor a lui Lobacevski. Modelul lui Poincaré are față de modelul dat mai sus dezavantajul de a aduce o parte din infinitul geometriei la distanță finită, însă prezintă multe alte avantaje din punct de vedere geometric. Să utilizăm astfel modelul lui Poincaré pentru a obține grupul de mișcare al geometriei lui Lobacevski.

Pentru aceasta să utilizăm coordonate complexe, punînd:

$$z = u + iv, \quad (i = \sqrt{-1}).$$

Putem scrie atunci metrica (16) sub forma:

$$ds^2 = \frac{4R^2 dz d\bar{z}}{-(\bar{z} - z)^2}, \tag{17}$$

unde $\bar{z}$ este $u - iv$, deci $\bar{z}$ este cantitatea complexă conjugată lui z. Considerînd transformările de variabilă complexă,

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1) \tag{18}$$

unde α, β, γ, δ sînt cantități reale, avem formulele:

$$dz' = \frac{dz}{(\gamma z + \delta)^2}, \quad d\bar{z}' = \frac{d\bar{z}}{(\gamma\bar{z} + \delta)^2},$$

$$\bar{z}' - \bar{z} = \frac{\bar{z} - z}{(\gamma z + \delta)(\gamma\bar{z} + \delta)},$$

deci metrica (17) rămîne invariantă la transformările (18). Aceste transformări constituie prin urmare grupul de mișcare al planului lui Poincaré. Cum aceste transformări se scriu

$$u' + iv' = \frac{\alpha u + \beta + \alpha iv}{\gamma u + \delta + \gamma iv}$$

[1]) V. N. Mihăileanu, geometrie neeuclidiană, Editura Academiei, București 1954, p. 123.

rezultă, înmulțind în membrul al doilea și numărătorul și numitorul cu $\gamma u + \delta - \gamma i v$, că avem:

$$u' = \frac{(\alpha u + \beta)(\gamma u + \delta) + \alpha\gamma v^2}{(\gamma u + \delta)^2 + \delta^2 v^2},$$

$$v' = \frac{-\gamma v(\alpha u + \beta) + \alpha v(\gamma u + \delta)}{(\gamma u + \delta)^2 + \gamma^2 v^2}, \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1). \tag{19}$$

Avem aici un grup cu trei parametri, deoarece α, β, γ, δ sînt legate de relația $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Acest grup constituie prin urmare grupul de mișcare al planului lui Lobacevski, așa cum grupul (15) din cap. I constituie grupul de mișcare al planului lui Euclid. Dacă în formulele (19) presupunem $\gamma = 0$ și $\alpha\delta = 1$, obținem un grup cu doi parametri

$$u' = \alpha^2 u + \lambda, \quad v' = \alpha^2 u$$

ce joacă rolul translațiilor din planul lui Euclid.

§ 5. SFERA ȘI PSEUDOSFERA

Se pot considera rezultatele din paragrafele 3 și 4 și dintr-un alt punct de vedere. Gauss a arătat chiar înaintea lui Riemann că dacă se dă o suprafață în spațiul euclidian cu trei dimensiuni, deci dacă se dau trei funcții f, φ, ψ de două variabile u, v și dacă punem

$$x = f(u, v), \quad y = \varphi(u, v), \quad z = \psi(u, v) \tag{20}$$

atunci din formula lui Pitagora din spațiu

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{20'}$$

obținem, ținînd seama de formulele (20), o formulă de forma:

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2, \tag{20''}$$

deci o formulă de forma (3), în care u, v joacă rolul lui x, y, deci un plan al lui Riemann. Orice suprafață conduce prin urmare la un plan al lui Riemann și reciproca este de asemenea adevărată, deci orice plan al lui Riemann provine din cel puțin o suprafață și în acest caz curbura K a planului lui Riemann coincide cu curbura lui Gauss a suprafeței, curbură care se definește prin formula:

$$K = \frac{1}{R_1 R_2},$$

unde R_1, R_2 sînt razele de curbură principale ale curbelor trasate pe suprafață. Dacă sîntem de exemplu în cazul unei sfere de rază R, atunci

secțiunile normale la sferă ne dau cercuri mari ale sferei, deci cercuri avînd raza R. Prin urmare, atît R_1 cît și R_2 sînt egale cu R și curbura lui Gauss K a sferei este $\frac{1}{R^2}$. De altfel, cercurile mari reprezintă pentru sferă drumurile cele mai scurte (geodezicile) suprafeței. Rezultă deci că un plan al lui Riemann de curbură constantă pozitivă $K = \frac{1}{R^2}$ provine dintr-o sferă de rază R. Pentru a se vedea explicit acest lucru să considerăm sfera de rază R cu centrul în origine. Deci ecuația ei se va scrie:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \tag{20'''}$$

și putem lua ca formule (20):

$$x = R\cos\varphi\cos\theta, \quad y = R\sin\varphi\cos\theta, \quad z = R\sin\theta, \tag{20^{IV}}$$

unde φ și θ sînt coordonatele geografice (longitudinea și latitudinea). Obținem în acest caz formula:

$$ds^2 = R^2[d\theta^2 + \cos^2\theta d\varphi^2].$$

Dacă punem

$$R\varphi = u, \quad R\theta = v,$$

obținem formula:

$$ds^2 = \cos^2\frac{v}{R} du^2 + dv^2, \tag{21}$$

care coincide cu formula (6) pentru $a = \cos\frac{v}{R}$.

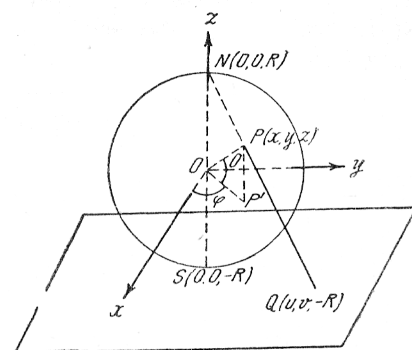


Fig. 41

Există de asemenea o altă formulă importantă ce ne dă metrica unei sfere. Se ajunge la această formulă utilizînd proiecția stereografică (fig. 36), care se obține făcînd proiecția sferei, de exemplu, din polul nord N pe planul tangent în polul sud S. Fie $P(x, y, z)$, $Q(u, v, -R)$ puncte corespondente. Să observăm că ecuațiile dreptei trecînd prin N și P se scriu, considerînd X, Y, Z drept coordonate curente,

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z - R}{z - R}.$$

Această dreaptă conține punctul $Q(u, v, -R)$ dacă avem:

$$\frac{u}{x} = \frac{v}{y} = \frac{-2R}{z - R},$$

formule ce ne dau:

$$x = u\frac{R - z}{2R}, \quad y = v\frac{R - z}{2R}, \tag{21'}$$

astfel că înlocuind în ecuația sferei (20''') obținem:

$$(u^2 + v^2)(R - z)^2 = 4R^2[z^2 - R^2].$$

Cum presupunem că P nu este în N, deci $z \neq R$, putem simplifica cu $z - R$, astfel că punînd $K = \frac{1}{R^2}$ putem scrie:

$$(R - z)(u^2 + v^2) = \frac{4}{K}(R + z),$$

ceea ce ne dă:

$$z = -R\frac{1 - \frac{K}{4}(u^2 + v^2)}{1 + \frac{K}{4}(u^2 + v^2)}, \tag{21''}$$

iar formulele (21') devin:

$$x = \frac{u}{1 + \frac{K}{4}(u^2 + v^2)}, \quad y = \frac{v}{1 + \frac{K}{4}(u^2 + v^2)}. \tag{21'''}$$

Înlocuind în formula lui Pitagora (20'), obținem:

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{\left[1 + \frac{K}{4}(u^2 + v^2)\right]^2}, \tag{22}$$

ceea ce constituie formula lui Riemann. Este interesant de observat că noi am obținut această formulă presupunînd $K = \frac{1}{R^2}$, deci K pozitiv. Ea se poate scrie și pentru K negativ. În particular, pentru $K = -4$ ea se scrie:

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(1 - u^2 - v^2)^2}, \tag{22'}$$

și evident această formulă are sens atît timp cît numitorul nu se anulează, deci, în particular, atît timp cît u, v satisfac la condiția:

$$u^2 + v^2 < 1,$$

care ne spune că u, v sînt puncte în interiorul cercului de rază unitate și cu centrul în originea axelor de coordonate.

Ne putem întreba acum dacă există suprafețe pentru care curbura lui Gauss este negativă. Astfel de suprafețe au fost descoperite de Beltrami[1] în 1868 și denumite *pseudosfere*. Ele pot fi definite de ecuațiile:

$$x = R\cos u \sin v, y = R\sin u \sin v, \quad z = R\left(\cos v + \log \operatorname{tg}\frac{v}{2}\right), \tag{22''}$$

iar metrica lor este dată de formula:

$$ds^2 = R^2\left[\sin^2 v du^2 + \frac{\cos^2 v}{\sin^2 v}dv^2\right]. \tag{23}$$

Formulele (22'') ne arată că pseudosfera este o suprafață de rotație, deoarece avem:

$$x^2 + y^2 = R^2 \sin^2 v,$$

deci suprafața este născută prin mișcarea unui cerc paralel cu planul $z = 0$ și cu centrul pe axa z.

Intersecția suprafeței cu planul $x = 0$ (deci $u = 90°$) este curba:

$$y = R\sin v, \ z = R\left[\cos v + \log \operatorname{tg}\frac{v}{2}\right],$$

numită *tractrice* (fig. 42) și pseudosfera se obține rotind această curbă în jurul axei z.

Rezultă deci că pentru a obține punctele pseudosferei trebuie să facem să varieze în formulele (22'') parametrul u între 0 și 360°, iar parametrul v să ia valori între 0 și 180°.

Trebuie să remarcăm însă că pentru $v = 90°$ se obțin punctele suprafeței din planul $z = 0$ și în aceste puncte tractricea are un punct de întoarcere. Aceste puncte sînt deci puncte singulare ale pseudosferei, numind puncte singulare ale unei suprafețe punctele în care suprafața nu are un plan tangent. Sfera este o suprafață pentru care

[1] Eugenio Beltrami (1835—1900), mare matematician italian, care a arătat că geometria lui Lobacevski-Bolyai se poate realiza pe pseudosferă.

toate punctele sînt puncte regulate, deci are planele tangente determinate.

De altfel, în punctele singulare ale pseudosferei nici metrica (23) a pseudosferei nu este regulată. În adevăr, pentru $v = 90°$, ținînd seama că avem $\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$, această metrică se scrie:

$$ds^2 = R^2 du^2,$$

deci se reduce la un singur pătrat. Într-un punct regulat al pseudosferei metrica este formată din suma a două pătrate, altfel spus discriminantul metricei este diferit de zero.

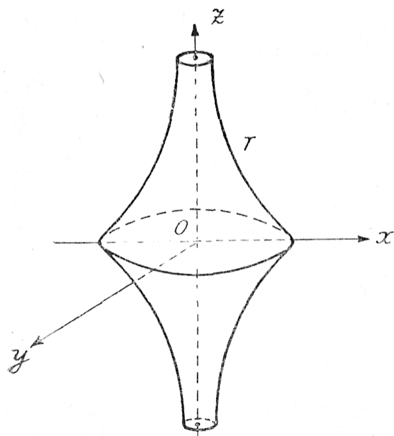


Fig. 42

Pentru a obține partea din pseudosferă situată deasupra planului $z = 0$, trebuie să facem să varieze v între 90° și 180°.

Să facem atunci transformarea de variabile:

$$u = \frac{\alpha}{R}, \quad \sin v = e^{-\frac{\beta}{R}}. \qquad (24)$$

Se observă că dacă v variază între 90° și 180°, atunci $\sin v$ variază între 1 și 0, deci β variază între zero și infinit. Cum pe de altă parte formula (23) devine formula (8), rezultă că printr-o transformare (24) pseudosfera (22″) se așterne peste regiunea din semiplanul lui Poincaré situată deasupra axei α, între paralelele $\alpha = 0$, $\alpha = 2\pi R$.

Dacă convenim acum să facem pe u să ia alte valori decît acele dintre 0 și $2\pi R$ rezultă că unui punct u_0, v_0 al regiunii superioare a pseudosferei îi corespund o infinitate de puncte în semiplanul superior al lui Poincaré, ale căror abscise α diferă printr-un număr de forma $2n\pi R$, unde n este un număr întreg.

Dacă convenim să presupunem regiunea superioară a pseudosferei înfășurată de o infinitate de ori de o pînză subțire, atunci această pînză se așterne pe semiplanul superior al lui Poincaré. Se spune că această pînză reprezintă o suprafață de acoperire a regiunii superioare a pseudosferei.

Rezultă deci că proprietățile pseudosferei într-o regiune suficient de mică corespund cu proprietățile regiunii corespunzătoare din planul lui Lobacevski și din acest punct de vedere se spune că pseudosfera

constituie un model local al geometriei lui Lobacevski. Cum am văzut însă, nu avem o așternere pe întreg planul lui Lobacevski, datorită faptului că pseudosfera are o linie de puncte singulare.

Hilbert[1] a arătat de altfel că nu există suprafețe cu curbură constantă negativă fără puncte singulare, deci suprafețe care să fie analogele sferelor (suprafețe care nu au puncte singulare).

Totuși, faptul arătat de Beltrami că pseudosfera constituie un model al geometriei lui Lobacevski a fost de o deosebită importanță; prin aceasta s-a arătat în mod convingător că această geometrie există (nu este contradictorie), căci altfel ar fi contradictorie geometria lui Euclid, pseudosfera fiind o figură a acestei geometrii.

Să observăm acum că noi am utilizat faptul că într-un plan al lui Riemann cu curbură constantă există un grup de mișcare cu trei parametri, deci se pot compara figurile prin suprapunere.

Proprietatea este adevărată pentru planul lui Euclid, pentru planul lui Lobacevski (unde curbura este negativă) și este adevărată și pentru sferă, căci rotațiile în jurul centrului sferei lasă sfera neschimbată. Deci putem considera ca o geometrie neeuclidiană și geometria pe o sferă. Helmholtz a pus problema de a determina geometriile ce au proprietatea de mobilitate maximă, care în cazul planului se enunță spunînd că două segmente egale se pot suprapune unul peste altul printr-o deplasare a planului. Problema a fost rezolvată de Sophus Lie, matematician norvegian, care a utilizat teoria sa a grupurilor continue de transformări și a arătat că singurele plane cu mobilitate maximă sînt planele lui Riemann cu curbură constantă. Este însă de observat că în geometria pe o sferă este verificată axioma; *printr-un punct la o dreaptă nu se poate duce nici o paralelă*. În adevăr, pe sferă cercurile mari joacă rolul dreptelor; deci orice două cercuri mari se întîlnesc întotdeauna în două puncte diametral opuse. Acest fapt contrazice însă și axioma că două drepte se întîlnesc în cel mult un punct. Pentru a îndepărta acest inconvenient se presupune că două puncte diametral opuse ale sferei reprezintă același punct al planului geometriei, plan care se convine a se numi *planul eliptic*, în timp ce acela al geometriei Lobacevski-Bolyai se convine a se numi *planul hiperbolic*, iar planul lui Euclid — *planul parabolic*.

Se poate avea o reprezentare a sferei pe un plan care să facă să corespundă la două puncte diametral opuse ale sferei, un singur punct din plan, utilizînd proiecția centrală a sferei. În adevăr, să considerăm planul tangent la sferă în polul sud $S(0,0, -R)$ și să numim cu u, v

[1] David Hilbert (1861—1943), mare matematician german. A realizat prima oară o construcție complet axiomatică a geometriei lui Euclid și a adus contribuții importante în domeniul ecuațiilor integrale, în teoria invarianților algebrici etc.

coordonatele din acest plan, avînd ca origine punctul S şi axele paralele cu Ox şi Oy. În acest caz, dacă $P(x, y, z)$ este un punct de pe sferă şi $Q(u, v, -R)$ proiecţia lui din plan, avem formulele:

$$x = \frac{u}{\sqrt{1 + K(u^2 + v^2)}}, \quad y = \frac{v}{\sqrt{1 + K(u^2 + v^2)}}, \quad z = \frac{1}{\sqrt{K}\sqrt{1 + K(u^2 + v^2)}}, \tag{25}$$

unde $K = \frac{1}{R^2}$ este curbura sferei. Introducînd în formula (20'), se obţine ca metrică a sferei în proiecţia centrală:

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{1 + K(u^2 + v^2)} - \frac{K(u\,du + v\,dv)^2}{[1 + K(u^2 + v^2)]^2}, \tag{25'}$$

deci planul u, v devine un plan al lui Riemann cu curbură constantă pozitivă. Să observăm însă că punctele ecuatorului sferei n-au corespondentele în planul u, v decît dacă completăm acest plan cu dreapta de la infinit. Deci punctele planului eliptic sînt punctele planului proiectiv.

Este însă de observat că această metrică ca şi metrica (22) poate fi utilizată şi pentru K mai mic ca zero, caz care se obţine presupunînd că în formula $K = \frac{1}{R^2}$, R este o cantitate pur imaginară, deci de forma $r\sqrt{-1}$, unde r este un număr real. În acest caz însă metrica (25') devine infinită, dacă coordonatele u, v satisfac condiţia

$$u^2 + v^2 = -\frac{1}{K} = r^2, \tag{25''}$$

deci dacă punctele $P(u, v)$ se găsesc pe un cerc de rază r. Metrica este însă regulată pentru punctele interioare cercului (25'').

Metrica (25') pentru K mai mic ca zero ne dă deci un model al planului hiperbolic, constituit de regiunea interioară a cercului (25'').

Geometria planului hiperbolic poate fi deci considerată ca geometria unei sfere de rază imaginară, aşa cum au observat şi Lambert şi Lobacevski.

Revenind la geometria planului eliptic, vom observa că sînt şi alte axiome prin care această geometrie diferă de aceea a lui Euclid. În particular, în această geometrie dreptele sînt de lungime finită, ori una din axiomele geometriei lui Euclid este că dreapta se poate prelungi la infinit în ambele direcţii. Se convine totuşi a se numi geometrii neeuclidiene plane atît geometria planului hiperbolic, cît şi

geometria planului eliptic, deoarece ele au în comun cu planul parabolic proprietatea de mobilitate maximă, dar se disting de acest plan prin axioma paralelelor.

Prima dintre aceste geometrii, deci geometria planului hiperbolic, are însă proprietatea interesantă de a diferi de aceea euclidiană numai prin axioma paralelelor, în timp ce geometria eliptică diferă şi prin alte axiome.

Se va arăta în capitolul III că axiomatizarea dată de Hilbert geometriei lui Euclid în spaţiu utilizează douăzeci de axiome, împărţite în cinci grupe, ultima grupă conţinînd axioma paralelelor, în timp ce grupa I conţine axiomele de legătură în număr de opt, grupa a II-a conţine axiomele de ordonare în număr de patru, grupa a III-a conţine axiomele de congruenţă în număr de cinci, iar grupa a IV-a — axiomele de continuitate în număr de două[1]. Din cele douăzeci de axiome, cincisprezece sînt axiome de geometrie plană, în timp ce cinci din cele opt axiome de incidenţă privesc relaţiile de incidenţă între puncte şi plane sau între drepte şi plane.

Este de asemenea interesant de observat că în axiomatizarea lui Hilbert punctele, dreptele şi planele sînt considerate ca trei sisteme de obiecte geometrice, primare, deci care nu se definesc, axiomele venind să arate ce relaţii există între aceste elemente geometrice. Există şi alte axiomatizări ale geometriei lui Euclid, în care se dă punctului un rol fundamental, aşa cum ne spune intuiţia noastră, dreptele, planele precum şi alte figuri ale geometriei putînd fi definite prin punctele lor[2].

Din axiomele lui Hilbert, în planul eliptic se verifică axiomele plane de incidenţă, în număr de 3, axiomele de congruenţă şi axioma de continuitate a lui Cantor-Dedekind ce capătă însă o formulare puţin schimbată.

Modelul lui Cayley. Se datoreşte lui Cayley un model al geometriilor parabolică, eliptică şi hiperbolică, ce arată legătura strînsă între aceste geometrii. Este interesant faptul că modelul lui Cayley a fost descoperit independent de Lobacevski şi simultan cu cercetările geometrului rus, fără ca autorul modelului să facă legătura între geometria sa şi geometria lui Lobacevski. Modelul lui Cayley se obţine considerînd în planul proiectiv raportat la coordonatele omogene x, y, z o conică nedegenerată, numită *absolutul geometriei*

$$\Omega(x, y, z) = 0.$$

---

[1] Vezi N. V. Efimov, *Geometrie superioară*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1952 p. 40.

[2] Vezi K. Borsuk şi W. Szmielew, *Foundations of Geometry* (*Fundamentele geometriei*), Amsterdam, 1960.

Prin transformări liniare și omogene ale coordonatelor se poate aduce ecuația conicei la forma:

$$x^2 + y^2 + \frac{1}{K} z^2 = 0.$$

Se consideră ca puncte ale modelului lui Cayley toate punctele planului proiectiv, dacă avem $K > 0$, deci dacă absolutul este imaginar, și punctele interioare absolutului în cazul $K < 0$.

Distanța dintre două puncte A, B ale modelului lui Cayley se definește prin formula:

$$d(A, B) = \frac{1}{\sqrt{|K|}} |\log(ABMN)|,$$

Fig. 43

unde M, N sînt punctele de intersecție ale dreptei AB cu absolutul, (fig. 43) puncte ce sînt reale în cazul $K < 0$ și imaginar conjugate în cazul $K > 0$, iar $(ABMN)$ este raportul anarmonic al punctelor A, B, M, N (cap. 1, § 8). În primul caz avem $(ABMN) > 0$, iar în al doilea caz, $(ABMN)$ este un număr complex de modul 1, deci de forma $e^{i\varphi}$. În fiecare din aceste cazuri, $d(A, B)$ este un număr real pozitiv. Dacă presupunem punctele A, B apropiate și trecem la coordonate neomogene punînd $x = u$, $y = v$, $z = 1$, distanța între punctele A, B coincide, pînă la termenii de ordin superior în du, dv, cu distanța dată de formula (25') Deci geometria modelului lui Cayley este o geometrie neeuclidiană, rezultat care a fost pus în evidență de Felix Klein.

Dreptele modelului lui Cayley sînt dreptele planului proiectiv în cazul $K > 0$ și segmentele dreptelor planului proiectiv din interiorul absolutului, în cazul $K < 0$.

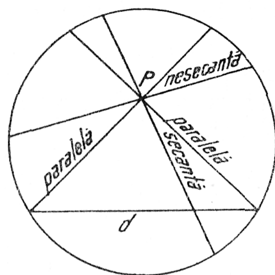


Fig. 44

Din faptul că transformările proiective păstrează rapoartele anarmonice rezultă că mișcările modelului lui Cayley sînt transformările proiective care lasă invariant absolutul.

Modelul lui Cayley dă o imagine clară a felului în care sînt distribuite secantele, nesecantele și paralelele ce se pot duce ditr-un punct P la o dreaptă d (fig. 44).

Modelul lui Cayley se poate generaliza în spațiu, considerînd în spațiul proiectiv cu coordonatele omogene x, y, z, t cuadrica

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{K} t^2 = 0 \qquad (26')$$

și definind distanța între două puncte prin aceeași formulă (26), M, N fiind de data aceasta intersecțiile dreptei AB cu cuadrica (26').

Mișcările spațiului lui Cayley sînt date de transformările liniare și omogene

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1z + d_1t \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2z + d_2t \\ z' &= a_3x + b_3y + c_3z + d_3t \\ t' &= a_4x + b_4y + c_4z + d_4t, \end{aligned} \qquad (26'')$$

care lasă invariantă cuadrica (26'). Ele depind de 6 parametri, ca și deplasările spațiului euclidian. Pentru $K < 0$ se obține un model al spațiului lui Lobacevski.

Să observăm că atît în cazul plan cît și în spațiu, modelul lui Cayley ne dă geometria lui Euclid dacă punem $K = 0$. Într-adevăr, dacă în formula (26) punem $K = 0$, obținem metrica geometriei lui Euclid în plan și același fenomen se prezintă în cazul spațiului.

Să studiem deplasările spațiului lui Lobacevski. Ele sînt date, după cum am arătat, de transformările proiective (26''), care păstrează cuadrica (26'), unde $K = -\frac{1}{R^2}$, deci care păstrează sfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2t^2 = 0$$

Deci o deplasare neeuclidiană transformă un punct al acestei sfere într-un alt punct al sferei. Utilizînd reprezentarea geometrică a sferei dată de formulele (21''), rezultă că pentru punctele sferei, transformarea (26'') se exprimă ca o transformare a parametrilor u, v. Punînd $u + iv = 2R\overline{w}$, unde w este o coordonată complexă, iar $\overline{w}$ conjugata ei, formulele (21''), (21''') se pot scrie în coordonate omogene x, y, z, t sub forma:

$$x + iy = 2R\overline{w}, \quad z = R(w\overline{w} - 1), \quad t = w\overline{w} + 1.$$

Din aceste relații rezultă:

$$\frac{z + Rt}{x + iy} = w, \quad \frac{z - Rt}{x - iy} = -\frac{1}{w}, \qquad (26''')$$

Dacă fixăm valoarea lui w, ecuațiile precedente definesc o generatoare a sferei. În mod analog se pot obține relațiile:

$$\frac{z + Rt}{x - iy} = \overline{w}, \quad \frac{z - Rt}{x + iy} = -\frac{1}{w},$$

care pentru valori date lui $\overline{w}$ definesc o a doua generatoare a sferei. Cum transformările proiective transformă dreptele în drepte, ele vor transforma generatoare ale sferei în generatoare ale sferei. Sînt însă posibile două cazuri: generatoarele din familia I se pot transforma între ele sau se pot transforma în generatoare din familia a II-a. În primul caz, transformarea (26″) se exprimă pe sferă printr-o formulă de forma $w' = f(w)$, iar în al doilea caz, printr-o formulă de forma $w' = f(\overline{w})$, unde f este în ambele cazuri o funcție analitică. Din expresia lui w, dată de formula (26″) ca funcție de x, y, z, t, și din faptul că variabilele x, y, z, t suferă o transformare liniară, rezultă că f este o funcție omografică, deci avem una dintre formulele:

$$w' = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}, \quad w' = \frac{\alpha\overline{w} + \beta}{\gamma\overline{w} + \delta}, \tag{26^{IV}}$$

unde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sînt numere complexe cu $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

Prima formulă corespunde la deplasări ce păstrează orientarea figurilor spațiului, iar a doua — la deplasări ce schimbă orientarea figurilor. Rezultă că grupul deplasărilor ce păstrează orientarea spațiului lui Lobacevski se identifică cu grupul omografiilor dreptei proiective complexe w. Acest fapt are o deosebită importanță pentru fizica relativistă unde joacă un rol important grupul deplasărilor ce păstrează orientarea spațiului lui Lobacevski, grup ce se mai numește grup al lui Lorentz.

Rezultatul precedent se mai poate lega de o proprietate interesantă din geometria elementară. În adevăr, dacă x, y sînt coordonate carteziene ortogonale în plan și dacă punem $w = x + iy$, atunci formulele (26^{IV}) definesc transformările planului care duc dreptele și cercurile în drepte și cercuri, care constituie grupul conform al planului. Această coincidență se explică în felul următor: transformările (26^{IV}) care păstrează sfera considerată mai sus transformă cercurile acestei sfere în cercuri, deoarece cercurile sferei se obțin prin intersecțiile sferei cu plane și planele se transformă în plane prin orice transformare proiectivă. Pe de altă parte, reprezentarea parametrică a sferei utilizată în raționamentele precedente era obținută cu ajutorul proiecției stereografice a sferei pe un plan și această proiecție transformă cercurile sferei în cercurile și dreptele planului. Deci, proiecția stereografică face să corespundă fiecărei

transformări proiective a sferei în ea însăși, o transformare conformă a planului.

Metrica lui Barbilian[1] Să presupunem că ne este dată în plan o curbă închisă C și două puncte A, B în interiorul acestei curbe. Fie atunci un punct P situat pe curba C și fie PB/PA raportul dintre ditanțele lui P la A și B. Cînd P descrie curba C acest raport trece printr-un maxim M și un minim m. Se numește *distanța Barbilian* a punctelor A și B în raport cu curba C cantitatea

$$d(A \cdot B) = \log M - \log m.$$

Este evident că această distanță se anulează dacă $A = B$ și este infinită dacă unul sau altul din punctele A, B este pe curba C, căci în acest caz m este zero. Rezultă deci că C este infinitul pentru distanțele d.

Să arătăm că în cazul în care curba C este un cerc, distanța d are proprietăți analoge distanțelor neeuclidiene. Să presupunem deci că C este dat de ecuația

$$X^2 + Y^2 = r^2. \tag{26^{V}}$$

În acest caz luînd o reprezentare parametrică a cercului

$$X = r\cos t, \quad Y = r\sin t$$

avem

$$\left(\frac{PB}{PA}\right)^2 = \frac{(r\cos t - \gamma)^2 + (r\sin t - \delta)^2}{(r\cos t - \alpha)^2 + (r\sin t - \beta)^2}$$

unde α, β sînt coordonatele punctului A și γ, δ coordonatele punctului B.

Deci putem scrie

$$\left(\frac{PB}{PA}\right)^2 = \frac{r^2 + \gamma^2 + \delta^2 - 2r(\gamma\cos t + \delta\sin t)}{r^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2r(\alpha\cos t + \beta\sin t)}$$

și prin urmare acest raport trece printr-un maxim sau minim numai dacă derivata cantității din membrul al doilea se anulează, deci dacă avem

$$(\gamma\sin t - \delta\cos t)[r^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2r(\alpha\cos t + \beta\sin t)] -$$
$$- (\alpha\sin t - \beta\cos t)[r^2 + \gamma^2 + \delta^2 - 2r(\gamma\cos t + \delta\sin t)] = 0.$$

[1] Dan Barbilian, *Generalizarea metricilor neeuclidiene*, Congresul matematicienilor slavi, Praga, 1934.

Făcînd calculele rezultă că t trebuie să satisfacă ecuaţia

$$P \sin t - Q \cos t + R = 0 \tag{27}$$

unde am pus

$$P = (\gamma - \alpha)(r^2 - \alpha\gamma) + \beta^2\gamma - \delta^2\alpha.$$
$$Q = (\delta - \beta)(r^2 - \beta\delta) + \delta\alpha^2 - \beta\gamma^2.$$
$$R = 2r\,(\alpha\delta - \beta\gamma).$$

Există deci două valori t_1 şi t_2 care ne dau două puncte P_1 şi P_2 pentru care raportele PB/PA sînt maxime şi minime şi distanţa $d(A \cdot B)$ este dată de formula

$$d(A \cdot B) = \log \frac{P_1B}{P_1A} : \frac{P_2B}{P_2A} =$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{r^2 + \gamma^2 + \delta^2 - 2r(\gamma \cos t_1 + \delta \sin t_1)}{r^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2r(\alpha \cos t_1 + \beta \sin t_1)} \cdot \frac{r^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2r(\alpha \cos t_2 + \beta \sin t_2)}{r^2 + \gamma^2 + \delta^2 - 2r(\gamma \cos t_2 + \delta \sin t_2)}.$$

Rezultă deci că distanţa lui Barbilian coincide cu distanţa definită de formula lui Cayley, dacă punctele P_1 ,P_2 se găsesc pe dreapta A, B ceea ce are loc dacă dreapta AB este un diametru.

Să calculăm distanţa d în cazul cînd punctele sînt infinit vecine, deci cînd avem

$$\alpha = x, \quad \beta = y, \quad \gamma = x + \mathrm{d}x, \quad \delta = y + \mathrm{d}y.$$

În acest caz, neglijînd termenii de gradul al doilea, avem

$$\frac{PB}{PA} = \sqrt{1 + \frac{2d\pi - 2r(\cos t\,\mathrm{d}x + \sin t\,\mathrm{d}y)}{p - 2r(x \cos t + x \sin t)}}$$

unde am pus

$$\mathrm{d}\pi = x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y, \quad p = r^2 + x^2 + y^2$$

astfel că ţinînd seama numai de termeni de primul ordin obţinem

$$\frac{PB}{PA} = 1 + \frac{d\pi - r\,(\cos t\,\mathrm{d}x + \sin t\,\mathrm{d}y)}{p - 2r(x \cos t + y \sin t)}.$$

Rezultă deci că acest raport trece printr-un maxim sau minim dacă t este o rădăcină a ecuaţiei (27) în care P, Q, R au valorile

$$P = r\mathrm{d}x - x\mathrm{d}\pi - y\mathrm{d}\sigma$$
$$Q = r^2\mathrm{d}y - y\mathrm{d}\pi + x\mathrm{d}\sigma \tag{27'}$$
$$R = 2r\mathrm{d}\sigma, \quad d\sigma = x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$$

Deci ecuaţia (27) ne dă

$$\cos t = \frac{P \sin t + R}{Q}$$

astfel că ridicînd la pătrat se obţine o ecuaţie de gradul al doilea în $\sin t$

$$\sin^2 t\,[P^2 + Q^2] + 2PR \sin t + R^2 - Q^2 = 0.$$

Această ecuaţie are două soluţii pentru $\sin t$ şi $\cos t$ date de formulele

$$\sin t_1 = \frac{-PR - Q\mathrm{d}l}{P^2 + Q^2}, \qquad \cos t_1 = \frac{RQ - P\mathrm{d}l}{P^2 + Q^2}$$

$$\sin t_2 = \frac{-PR + Q\mathrm{d}l}{P^2 + Q^2}, \qquad \cos t_2 = \frac{RQ + P\mathrm{d}l}{P^2 + Q^2}$$

unde am pus

$$\mathrm{d}l^2 = P^2 + Q^2 - R^2. \tag{27''}$$

Ţinînd seama că dacă $|\alpha| < 1$ atunci

$$\log\,(1 + \alpha) = \alpha + \ldots$$

deci rezultă că notînd cu ds distanţa Barbilian a punctelor $A(x,y)$, $B(x + \mathrm{d}x,\ y + \mathrm{d}y)$, putem scrie

$$ds = \frac{d\pi - r(\cos t_1\mathrm{d}y + \sin t_1\mathrm{d}y)}{p - 2r(x \cos t_1 + y \sin t_1)} - \frac{d\pi - r(\cos t_2\mathrm{d}x + \sin t_2\mathrm{d}y)}{p - 2r(x \cos t_2 + y \sin t_2)}.$$

Deci

$$\mathrm{d}s = \frac{r(p\mathrm{d}x - 2xd\pi)(\cos t_2 - \cos t_1) + r(p\mathrm{d}y - 2yd\pi)(\sin t_2 - \sin t_1) - 2r^2 \sin\,(t_2 - t_1)\mathrm{d}\sigma}{p^2 - 2rp[x(\cos t_2 + \cos t_1) + y(\sin t_2 + \sin t_1) + 4r^2x^2 \cos t_1 \cos t_2 + y^2 \sin t_1 \sin t_2 + xy \sin\,(t_2 - t_1)}. \tag{27''}$$

Ţinînd seama că avem

$$\sin t_2 - \sin t_1 = \frac{2Q\mathrm{d}l}{P^2 + Q^2}, \qquad \cos t_2 - \cos t_1 = \frac{2P\mathrm{d}l}{P^2 + Q^2},$$

$$\sin t_2 + \sin t_1 = -\frac{2PR}{P^2 + Q^2}, \qquad \cos t_2 + \cos t_1 = \frac{2RQ}{P^2 + Q^2},$$

$$\sin t_1 \sin t_2 = \frac{R^2 - Q^2}{P^2 + Q^2}, \qquad \cos t_1 \cos t_2 = \frac{R^2 - P^2}{P^2 + Q^2},$$

$$\sin\,(t_2 + t_1) = \frac{-2PQ}{P^2 + Q^2}, \qquad \sin\,(t_2 - t_1) = \frac{2R\mathrm{d}l}{P^2 + Q^2}$$

formula (27''') se scrie

$$ds = \frac{(p\mathrm{d}x - 2x d\pi)P + (P\mathrm{d}y - 2y d\pi)Q - 2rR\mathrm{d}\sigma}{P^2(P^2+Q^2) - 4rpR(Qx - Py) + 4r^2R^2(x^2+y^2) - 4r^2(Px + Qy)^2} 2r\mathrm{d}l. \quad (28)$$

Să observăm că avem

$$\left.\begin{aligned} &P^2 + Q^2 = r^4(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2) + (x^2 + y^2 - 2r^2)d\pi^2 + (x^2 + y^2 + 2r^2)\mathrm{d}\sigma^2; \\ &Px + Qy = (r^2 - x^2 - y^2)d\pi, \quad Qx - Py = p\mathrm{d}\sigma. \\ &P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = r^2(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2) - \mathrm{d}\pi^2 + d\sigma^2, \quad R = 2r\mathrm{d}\sigma. \end{aligned}\right\} (28')$$

deci se obține

$$ds = \frac{p[r^2(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2) - d\pi^2 + \mathrm{d}\sigma^2] - 2(r^2 - x^2 - y^2)\,\mathrm{d}\pi^2 - 4r^2\mathrm{d}\sigma^2}{p^2r^4(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2) + [p^2(x^2+y^2-2r^2) - 4r^2(r^2-x^2-y^2)^2]d\pi^2 + [p^2(x^2+y^2-6r^2) - 4r^2(r^2-x^2-y^2)^2 + 16r^4(x^2+y^2)]\mathrm{d}\sigma^2} \cdot$$

$$\cdot 2rdl \quad (28'')$$

unde $\mathrm{d}l$ este dat de formula

$$dl^2 = r^4(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2) + (x^2 + y^2 - 2r^2)(d\pi^2 + \mathrm{d}\sigma^2).$$

Ținînd seama că avem

$$\mathrm{d}\pi^2 + \mathrm{d}\sigma^2 = (x^2 + y^2)(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)$$

rezultă

$$\mathrm{d}l^2 = (r^2 - x^2 + y^2)^2\,(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)$$

deci numărătorul formulei (28'') se scrie

$$(r^2 - x^2 - y^2)^2(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)$$

În ce privește numitorul formulei (28'') se poate observa că termenii în $d\pi^2$ și $d\sigma^2$ sînt egali cu

$$p^2(x^2 + y^2 - 2r^2) - 4r^2(r^2 - x^2 - y^2)^2 =$$
$$= (x^2 + y^2)^3 - 4r^2(x^2 + y^2)^2 + 5r^4(x^2 + y^2) - 6r$$

astfel că acest numitor se scrie

$$(r^2 - x^2 - y^2)^4\,(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)$$

Rezultă deci că formula (28'') se scrie sub forma simplă

$$\mathrm{d}s = \frac{2r\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}}{r^2 - x^2 - y^2}. \quad (28''')$$

Metrica lui Barbilian este deci o metrică riemanniană dată de formula

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{4(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)}{[1 + k(x^2 + y^2)]^2} \quad \left(k = -\frac{1}{r^2}\right). \quad (29)$$

Punînd $2x = \xi$; $2y = \eta$ se obține metrica lui Riemann (22), cu curbură negativă. Avem deci teorema:

Metrica lui Barbilian pentru un cerc coincide cu metrica (22) a lui Riemann cu curbura negativă.

Rezultă deci că metrica lui Barbilian ne dă în cazul cercului o interpretare geometrică simplă a metricei lui Riemann cu curbură negativă.

Vom observa de asemenea că geodezicile metricei (29) sînt cercuri ortogonale cercului (26^V), astfel că notînd cu M, N punctele de intersecție al unui asemenea cerc ce trece prin A, B, distanța este dată de ormula (26) în care A, B, M, N sînt puncte situate pe acest cerc.

§ 6. TRIGONOMETRIE NEEUCLIDIANĂ

Să calculăm acum formulele trigonometrice într-un triunghi din planul hiperbolic și din planul eliptic. Pentru aceasta trebuie să considerăm un model pentru unul din aceste plane și să vedem ce relații există între elementele unui triunghi (laturi și unghiuri). Să considerăm, de exemplu, cazul planului eliptic. Pentru aceasta putem considera ca model sfera cu punctele diametral opuse identificate, deci trebuie să considerăm un triunghi sferic ABC, a cărui suprafață nu depășește o semisferă.

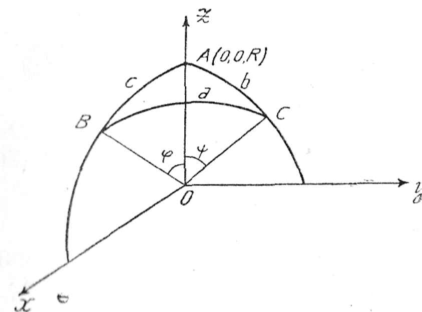


Fig. 45

Dacă acest triunghi este dreptunghic, putem prin rotații ale sferei să facem ca A să fie Polul Nord, deci A să aibă coordonatele 0, 0, R, iar punctele B, C să fie situate respectiv în planele de coordonate Oxz, Oyz, deci B să aibă coordonatele $R \sin \varphi$, 0, $R \cos \varphi$ iar C să aibă coordonatele 0, $R \sin \psi$, $R \cos \psi$, unde φ și ψ sînt unghiurile pe care razele OB, OC le fac cu axa z (fig. 45). Se observă că notînd cu a, b, c laturile

triunghiului, deci lungimile arcurilor de cercuri mari BC, AC, AB, avem relațiile:

$$c = R\varphi, \quad b = R\psi$$

Să observăm acum că fiind date două puncte $M(x, y, z)$, $M'(x', y', z')$ situate pe sferă, cosinusul unghiului θ pe care-l fac razele OM, OM' este dat de formula (14′) din capitolul I deci avem:

$$\cos\theta = \frac{xx' + yy' + zz'}{R^2}. \tag{30}$$

Dacă aplicăm această formulă razelor OC, OB, obținem formula:

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R}, \tag{30′}$$

care constituie deci formula lui Pitagora într-un triunghi dreptunghic din planul eliptic, unde b, c sînt catetele și a este ipotenuza triunghiului dreptunghic.

Să vedem cum arată această formulă în planul hiperbolic. Pentru aceasta trebuie să schimbăm R și iR și să observăm că ținînd seama de formulele lui Euler

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \tag{31}$$

și de faptul că dacă numim cosinus și sinus hiperbolic, funcțiile

$$\mathrm{ch}\, x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{sh}\, x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}, \tag{31′}$$

rezultă că avem formulele:

$$\mathrm{ch}\, x = \cos ix, \quad \mathrm{sh}\, x = i \sin ix. \tag{32}$$

Deci schimbînd R cu iR, formula (30′) devine:

$$\mathrm{ch}\frac{a}{R} = \mathrm{ch}\frac{b}{R}\,\mathrm{ch}\frac{c}{R}, \tag{32′}$$

care constituie formula lui Pitagora în planul lui Labacevski-Bolyai.

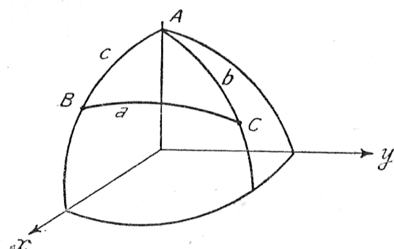


Fig. 46

Să considerăm acum un triunghi sferic oarecare (fig. 46). Putem face, prin rotații ale sferei, ca A să fie în Polul Nord, ca B să fie în planul $y = 0$, deci B, C să aibă respectiv coordonatele:

$$B\left[R\sin\frac{c}{R},\ O,\ R\cos\frac{c}{R}\right],$$

$$C\left[R\sin\frac{b}{R}\cos A,\quad R\sin\frac{b}{R}\sin A,\quad R\cos\frac{b}{R}\right].$$

Rezultă deci, aplicînd formula (30), că unghiul a/R dintre OB și OC este dat de formula:

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R} + \sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}\cos A, \tag{33}$$

care generalizează teorema lui Pitagora pentru un triunghi oarecare. Schimbînd R în iR și ținînd seama de formulele (32), obținem formula din planul hiperbolic:

$$\mathrm{ch}\frac{a}{R} = \mathrm{ch}\frac{b}{R}\,\mathrm{ch}\frac{c}{R} - \mathrm{sh}\frac{b}{R}\,\mathrm{sh}\frac{c}{R}\cos A. \tag{33′}$$

Se demonstrează de asemenea că într-un triunghi sferic dreptunghic (fig. 20) avem formula[1]:

$$\mathrm{tg}\frac{b}{R} = \mathrm{tg}B\sin\frac{c}{R} \tag{34}$$

și deci și formula corespunzătoare pentru un triunghi dreptunghic din planul hiperbolic

$$\mathrm{th}\frac{b}{R} = \mathrm{tg}\, B\,\mathrm{sh}\frac{c}{R}. \tag{34′}$$

Să aplicăm această formulă unui triunghi din planul hiperbolic, a cărui latură b crește la infinit (fig. 47). În acest caz unghiul B tinde la unghiul de paralelism al dreptei paralele dusă prin B la dreapta AC. Ținînd seama că tangenta hiperbolică

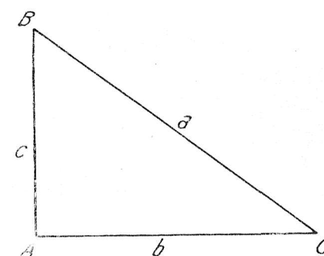


Fig. 47

$$\mathrm{th}\frac{b}{R} = \frac{e^{\frac{b}{r}} - e^{-\frac{b}{r}}}{e^{\frac{b}{R}} + e^{-\frac{b}{R}}}$$

tinde la valoarea 1 cînd b tinde la infinit, obținem notînd cu α unghiul de paralelism și cu p distanța AB

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2i}{e^{\frac{p}{R}} - e^{-\frac{p}{R}}}.$$

[1] Vezi G. Vrănceanu, op. cît, cap XVIII.

Ținînd seama că avem

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}},$$

rezultă formula lui Lobacevski:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = e^{-\frac{p}{R}} \left(\alpha = 2 \operatorname{arctg} e^{-\frac{p}{R}} \right) \tag{35}$$

care ne dă unghiul de paralelism.

Revenind la un triunghi oarecare avem, de asemenea, în planul eliptic, formulele:

$$\frac{\sin \frac{a}{R}}{\sin A} = \frac{\sin \frac{b}{R}}{\sin B} = \frac{\sin \frac{c}{R}}{\sin C}, \tag{36}$$

iar în planul hiperbolic formulele:

$$\frac{\operatorname{sh} \frac{a}{R}}{\sin A} = \frac{\operatorname{sh} \frac{b}{R}}{\sin B} = \frac{\operatorname{sh} \frac{c}{R}}{\sin C} \tag{36'}$$

și este interesant de remarcat că aceste formule sînt asemănătoare cu formulele din planul euclidian (planul parabolic), care ne spun că într-un triunghi laturile sînt proporționale cu sinusurile unghiurilor opuse [cap. I, formulele (9)].

Într-un triunghi sferic oarecare suma unghiurilor este mai mare decît două unghiuri drepte, și avem formula lui Gauss

$$A + B + C = 180° + \frac{S}{R^2}, \tag{37}$$

unde S este aria triunghiului. Să verificăm această formulă cînd triunghiul are două unghiuri drepte, de exemplu, unghiurile B, C. În acest caz avem:

$$A = \frac{S}{R^2},$$

formulă care se verifică observînd că luînd vîrful A în Polul Nord și B, C pe ecuator, aria triunghiului ABC este evident proporțională

cu unghiul A și atunci cînd A ia valoarea maximă de 360° se obține suprafața semisferei $2\pi R^2$.

Formula (37) în planul hiperbolic se înlocuiește cu:

$$A + B + C = 180° - \frac{S}{R^2} \tag{38}$$

și regăsim proprietatea că suma unghiurilor într-un triunghi este mai mică decît două unghiuri drepte.

§ 7. PROPRIETĂȚI GLOBALE

Ne vom ocupa în acest paragraf de unele probleme privind proprietățile globale sau topologice referitoare la o geometrie dată. Se numește *topologie* acea parte a geometriei care consideră proprietățile ce rămîn invariante la o transformare continuă. Se numește *geometrie diferențială globală*, acea geometrie care consideră proprietăți ale obiectelor geometrice care sînt definite în întreg spațiul considerat, cum ar fi metrica spațiului, sau o corespondență între spațiul dat și alt spațiu etc.

Am văzut, de exemplu, în § 5 că Beltrami a arătat că geometria lui Lobacevski-Bolyai poate fi realizată pe pseudosferă. Am văzut că această realizare nu este însă globală, deci nu se poate reprezenta întreg planul hiperbolic pe pseudosferă, deoarece pseudosfera are metrica degenerată în punctele ei singulare. Se exprimă acest fapt, spunînd că reprezentarea planului hiperbolic pe pseudosferă este locală, deci valabilă într-o anumită regiune, care nu cuprinde întreg planul hiperbolic, datorită faptului că pseudosfera are singularități.

Cum pe de altă parte Hilbert a arătat că nu există în spațiul euclidian cu trei dimensiuni suprafețe cu curbură constantă negativă fără singularități[1], rezultă că planul hiperbolic nu poate fi realizat global în spațiul euclidian E_3. Se exprimă acest fapt spunînd că planul hiperbolic nu poate fi scufundat în spațiul euclidian E_3.

S-a pus problema de a ști dacă planul hiperbolic poate fi scufundat global într-un spațiu euclidian cu mai multe dimensiuni. Un prim rezultat a fost obținut de Bieberbach, care a arătat că acest plan poate fi scufundat într-un spațiu euclidian cu o infinitate numerabilă de dimensiuni, deci într-un spațiu Hilbert.

[1] Vezi M. Antonescu, *Asupra teoremei lui Hilbert din geometria lui Labacevski—Bolyai*, „Studii și cercetări matematice", vol. IV, București, 1953, pp. 197—211.

Notînd cu $H(x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}, \ldots)$ un asemenea spaţiu trebuie ca seria $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{2n}^2 + \ldots$ să fie convergentă. Dacă punem

$$z_n = x_{2n-1} + ix_{2n} = \frac{1}{\sqrt{n}}(u + iv)^n,$$
$$\bar{z}_n = x_{2n-1} - ix_{2n} = \frac{1}{\sqrt{n}}(u - iv)^n, \quad (i = \sqrt{-1}). \tag{39}$$

unde n este un număr întreg pozitiv, rezultă că avem

$$x_1^2 + \ldots + x_{2n}^2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \bar{z}_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(u^2 + v^2)^2}{n}$$

şi prin urmare seria din primul membru este convergentă dacă $u^2 + v^2 < 1$.

În spaţiul H, formulele (39) definesc o suprafaţă cu două dimensiuni raportată la parametrii u, v şi avem:

$$dz_n = \sqrt{n}(u + iv)^{n-1}(du + idv)$$
$$d\bar{z}_n = \sqrt{n}(u - iv)^{n-1}(du - idv),$$

prin urmare rezultă formula

$$dz_n d\bar{z}_n = dx_{2n-1}^2 + dx_{2n}^2 = n[u^2 + v^2]^{n-1}[du^2 + dv^2].$$

Rezultă deci că putem scrie formula:

$$ds^2 = \sum_{\alpha=1}^{\infty} dx_\alpha^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n(u^2 + v^2)^{n-1}[du^2 + dv^2]. \tag{39'}$$

Ţinînd seamă pe de altă parte de formula care ne dă suma unei progresii geometrice

$$1 + r + \ldots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r},$$

dacă facem pe n să tindă la infinit şi presupunem $|r| < 1$, atunci $\lim r^{n+1} = 0$ pentru $n \to \infty$ şi deci avem:

$$\frac{1}{1 - r} = 1 + r + \ldots + r^n + \ldots, \tag{39''}$$

ceea ce se exprimă spunînd că membrul al doilea reprezintă dezvoltarea în serie a primului membru; acest fapt fiind posibil, bineînţeles, numai dacă $|r| < 1$.

Derivînd formula (39'') în raport cu r, termen cu termen, se obţine formula:

$$\frac{1}{(1 - r)^2} = 1 + 2r + \ldots + nr^{n-1} + \ldots, \tag{39'''}$$

membrul al doilea reprezentînd dezvoltarea în serie a primului membru. Ţinînd seama de această formulă, putem scrie deci (39') sub forma lui Bieberbach[1]

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \mathrm{d}x_\alpha^2 = \frac{\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2}{(1 - u^2 - v^2)^2}, \tag{39^{IV}}$$

care coincide cu formula (22') a metricei planului hiperbolic dacă

$$u^2 + v^2 < 1.$$

Există şi o altă scufundare a planului lui Lobacevski într-un spaţiu Hilbert datorită lui Blanuşa, care se obţine plecînd de la metrica (16) pe care o vom scrie schimbînd rolul variabilelor u, v deci sub forma

$$\mathrm{d}s^2 = R^2 \frac{\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2}{u^2}. \tag{40}$$

Să considerăm deci ca spaţiu Hilbert spaţiul avînd coordonatele x_0, $x_1, \ldots, x_{2n} \ldots$ şi să punem

$$x_0 = F(u), \quad x_{2n-1} = f_n(u)\cos(a_n v),$$
$$x_{2n} = f_n(u)\sin(a_n v), \quad n = 1, 2, \ldots$$

unde a_n sînt constante.

Avem deci o suprafaţă în spaţiul Hilbert a cărei metrică coincide cu (40), dacă sînt verificate condiţiile

$$F'^2(u) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n'^2(u) = \frac{R^2}{u^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(u) a_n^2 = \frac{R^2}{u^2}. \tag{40'}$$

Dar se poate satisface ultima dintre aceste condiţii luînd

$$f_n(u) = \frac{R}{a_n} \cdot \frac{1}{(1 + u^2)^{\frac{n}{2}}}. \tag{40''}$$

[1] L. Bieberbach, *Eine singularitätenfreie Fläche constanter Krümmung im Hilbertschen Raum*, Comentarii math., Helvetici, 4, 1932, pp. 248–255.

Într-adevăr în acest caz primul membru al ultimei ecuații este, abstracție făcînd de R^2, o serie geometrică avînd ca rație $(1 + u^2)^{-1}$ și ca prim termen $(1 + u^2)^{-1}$, deci avem

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 a_n^2 = R^2 \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1+u^2}} = \frac{R^2}{u^2}.$$

Dacă derivăm formulele (40'') obținem

$$f_n'(u) = -\frac{R_n u}{a_n} \cdot \frac{1}{(1+u^2)^{\frac{n}{2}+1}}$$

astfel că avem

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'^2(u) = R^2 u^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{a_n^2} \cdot \frac{1}{(1+u^2)^{n+2}}. \qquad (40''')$$

Ținînd seama că formula (39''') ne dă

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1}{(1+u^2)^{n-1}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{1+u^2}\right)^2} = \frac{(1+u^2)^2}{u^4},$$

rezultă că formula (40''') pentru $a_n = \sqrt{n}$ se scrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'^2(u) = \frac{R^2}{u^2(1+u^2)}$$

și prin urmare prima formulă (40') ne dă

$$F'(u) = \frac{R}{\sqrt{1+u^2}}$$

și deci putem lua

$$F(u) = R \log (u + \sqrt{1 + u^2}).$$

Avem deci teorema lui Blanușa[1]:

[1] D a n i l o B l a n u ș a, *Eine isometrische und singularitetenfreie Eimbetung des hyperbolischen Raumes in Hilberteschen Raum*, Monatshefte für Math. 57, 1953, pp. 102—108.

Se obține o scufundare a semi-planului Poincaré într-un spațiu Hilbert luînd

$$x_0 = R \log (u + \sqrt{1 + u^2}),$$

$$x_{2n-1} = \frac{R}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{(1+u^2)^{\frac{n}{2}}} \cos (\sqrt{n}\, v),$$

$$x_{2n} = \frac{R}{\sqrt{n}} \frac{1}{(1+u^2)^{\frac{n}{2}}} \sin (\sqrt{n}\, v), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Este de observat că atît scufundarea lui Bieberbach cît și scufundarea lui Blanușa sînt analitice, deci funcțiile care se utilizează nu numai că au derivate de orice ordin, însă sînt și dezvoltabile în serii convergente, sînt deci funcții analitice.

Recent Blanușa[1] a arătat că planul hiperbolic poate fi scufundat într-un spațiu euclidian cu șase dimensiuni, însă scufundarea sa nu este analitică; funcțiile pe care le utilizează Blanușa au derivate de orice ordin, însă nu sînt dezvoltabile în serii convergente.

Ca exemplu de funcție care are derivate de orice ordin, dar nu este analitică, se poate da funcția continuă, definită pentru $x \neq 0$ prin

$$y = e^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\frac{1}{e^{x^2}}},$$

care are evident valoarea zero în origine, deoarece $e^{\frac{1}{x^2}}$ tinde către infinit pentru $x \to 0$. Derivata de primul ordin a acestei funcții este:

$$y' = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

și în mod analog se obțin derivatele de orice ordin și toate aceste derivate sînt nule în origine. Or, dezvoltarea în serie a acestei funcții în jurul originii ar trebui să fie dată de formula:

$$y = (y)_0 + (y')_0 x + (y'')_0 \frac{x^2}{2} + \ldots, \qquad (40)$$

unde $(y)_0$, $(y')_0$, ... sînt valorile funcției și derivatelor sale în origine.

[1] D. B l a n u ș a, *Über die Einbettung hyperbolischer Räume in euklidische Räume*, în „Monatshefte für Mathematik", 59, 1955, pp. 217—229.

Or, așa cum am observat deja, funcția $e^{\frac{1}{x^2}}$ are valoarea infinită pentru $x=0$, deci y are valoarea zero pentru $x=0$, deci $(y)_0 = 0$ și avem de asemenea $(y')_0 = 0, \ldots,$ deoarece funcția $e^{\frac{1}{x^2}}$ crește mai repede decît orice putere $\frac{1}{x^m}$ cînd x tinde la zero.

Deci seria (40) ne dă $y = 0$, prin urmare nu reprezintă funcția $e^{-\frac{1}{x^2}}$.

Am spus că nu se cunoaște o scufundare analitică a spațiului hiperbolic într-un spațiu euclidian cu un număr finit de dimensiuni, în schimb cunoaștem scufundări ale planului eliptic cu această proprietate. În adevăr, am numit plan eliptic sfera în care am identificat punctele diametral opuse. Astfel, dacă considerăm sfera de rază 1

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \tag{41}$$

în spațiul euclidian și luăm un spațiu euclidian cu șase dimensiuni E_6 raportat la coordonate ortogonale $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$, și punem

$$\begin{gathered} y_1 = x^2, y_2 = y^2, y_3 = z^2, \\ y_4 = \sqrt{2}yz, \; y_5 = \sqrt{2}xz, \; y_6 = \sqrt{2}xy, \end{gathered} \tag{42}$$

obținem în E_6 un loc geometric cu două dimensiuni, dacă presupunem că x, y, z sînt legate de ecuația (41).

În acest caz evident că la orice punct al planului eliptic corespunde un punct al locului geometric (42). Invers, dacă avem un punct al locului geometric, pentru care avem, de exemplu, $y_1 \neq 0$, atunci formulele (42) ne dau:

$$x = \varepsilon\sqrt{y_1}, \; z = \frac{y_5}{\sqrt{2y_1}}, \; y = \frac{y_6}{\sqrt{2y_1}}, \; (\varepsilon = \pm 1)$$

deci avem două soluții: (x, y, z) și $(-x, -y, -z)$, deci două puncte diametral opuse pe sferă, prin urmare un singur punct al planului eliptic. Cum cel puțin una din coordonatele x, y, z este diferită de zero, deci cel puțin una din coordonatele y_1, y_2, y_3 este diferită de zero, rezultă teorema:

Formulele (42) *realizează o scufundare globală analitică a planului eliptic în* E_6.

Formulele (42) ne dau de fapt o scufundare a planului eliptic în spațiul E_5, deoarece avem, ținînd seama de (41),

$$y_1 + y_2 + y_3 = 1.$$

Rezultă, prin urmare, că avem o scufundare într-un hiperplan al spațiului E_6, deci într-un spațiu euclidian cu 5 dimensiuni.

Scufundarea (42) se cheamă scufundarea lui Manoury[1] și se vede că locul geometric (42) este situat pe sfera unitate din spațiul E_6, căci avem:

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2 + y_6^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 1. \tag{42'}$$

Există scufundări ale planului eliptic și într-un spațiu euclidian cu patru dimensiuni E_4 (z_1, z_2, z_3, z_4); de exemplu, putem considera scufundarea

$$z_1 = x^2, \; z_2 = xy, \; z_3 = xz + y^2, \; z_4 = yz. \tag{43}$$

Scufundarea (42) a lui Manoury are însă anumite proprietăți geometrice, pe care nu le are scufundarea (43), și anume dreptelor geometriei planului eliptic le corespund prin (42), cercuri în spațiul E_6.

Vom trece acum la alte probleme globale, plecînd de la faptul că se poate obține un spațiu din altul identificînd anumite puncte, cum este cazul trecerii de la sferă la planul proiectiv (eliptic) prin identificarea punctelor diametral opuse. Se poate prezenta această operație considerînd transformarea

$$x' = -x, \; y' = -y, \; z' = -z \tag{44}$$

care transformă punctul $P(x, y, z)$ în punctul diametral opus $P'(-x, -y, -z)$. Se vede atunci că planul eliptic se obține din sferă identificînd punctele ce se transformă unul în altul prin grupul (44). Grupul generat de (44) este un grup discret pe sferă și este format din două transformări, transformarea (44) și transformarea identică, căci aplicînd încă o dată transformarea (44) se ajunge la transformarea identică:

$$x'' = x, \; y'' = y, \; z'' = z.$$

Un grup se zice *discret* dacă nu are puncte fixe și dacă transformă orice punct P într-un punct P' unde distanța PP' este mai mare decît un număr dat $a > 0$.

Se arată că nu există alt grup discret pe sferă în afară de grupul considerat mai sus și că singurele spații complete cu două dimensiuni cu curbură constantă pozitivă sînt sfera și planul eliptic. Prin spațiu complet se înțelege un spațiu în care pe orice dreaptă în orice sens se pot parcurge distanțe oricît de mari.

---

[1] G. Manoury, *Sphères de seconde espèce*, în „Niew Archief Wiskunde" (2), 4 (1898), Amsterdam, pp. 83–39.

Utilizarea grupurilor discrete poate fi făcută și în cazul planului euclidian și în cazul planului hiperbolic, pentru a obține din ele alte spații, așa cum din sferă am obținut planul eliptic.

Să considerăm în primul rînd planul euclidian raportat la coordonate carteziene ortogonale x, y și să considerăm grupul generat de transformarea

$$x' = x + 1, \; y' = y \tag{44'}$$

care constituie o translație de lungime 1 de-a lungul axei x. Grupul este format în acest caz de transformarea identică și din translațiile:

$$x' = x + n, \; y' = y, \tag{45}$$

unde n este un număr întreg pozitiv sau negativ, deci grupul are în acest caz o infinitate numărabilă de transformări. Dacă împărțim planul în fîșii de lățime 1 prin paralele la axa y, așa cum arată fig. 48, transformările (45) duc aceste fîșii una în alta.

În adevăr, transformarea (45) transformă un punct de coordonate (x_0, y_0) într-un punct de coordonate $(x_0 + n, y_0)$.

Dacă presupunem acum că planul este de hîrtie și îl tăiem după dreptele indicate în figură și luăm una din fîșiile obținute, de exemplu fîșia avînd baza OA, și o îndoim așa fel ca dreptele duse prin O și A să se aștearnă una peste alta, se obține un cilindru, suprafață binecunoscută în geometria elementară.

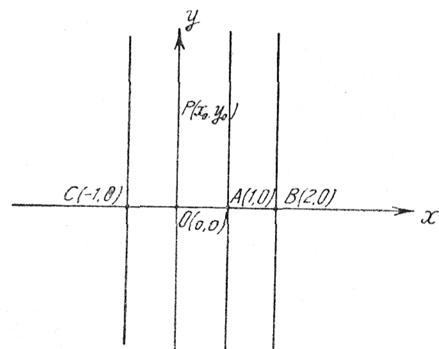


Fig. 48

Dacă $P(x_0, y_0)$ este un punct pe acest cilindru, avem $0 \leqslant x_0 \leqslant 1$

Ținînd seama că avem o infinitate de asemenea fîșii, rezultă că la orice punct P de pe cilindrul de bază OA corespund o infinitate de puncte în planul euclidian, echivalente cu punctul P față de grupul (45).

Rezultă atunci că spațiul obținut prin identificarea punctelor transformate unul în altul de grupul (45) este cilindrul, iar planul euclidian acoperă cilindrul de o infinitate de ori. Se zice că planul euclidian este spațiul de acoperire universală a cilindrului.

Invers, fiind dat cilindrul, dacă îl tăiem după o generatoare, îl putem așterne în întregime pe plan, fără alte rupturi; de aceea se zice că cilindrul este o suprafață desfășurabilă.

Planul euclidian și cilindrul au deci din punct de vedere local aceeași geometrie euclidiană; măsurarea distanțelor se face după aceeași

formulă a lui Pitagora. Din punct de vedere global însă, planul euclidian și cilindrul sînt suprafețe distincte. În adevăr, în plan este valabilă proprietatea că orice curbă închisă se poate deforma prin continuitate la un punct, ceea ce se exprimă spunînd că planul euclidian este o suprafață simplă conexă. Pe cilindru proprietatea nu mai este adevărată, deoarece cercul de secțiune al cilindrului cu un plan, de exemplu, nu poate fi deformat la un punct.

Să presupunem acum că avem pe fiecare dintre axele x, y cîte un grup discret, anume grupul (45) pe axa Ox și grupul

$$x' = x, \; y' = y + m \tag{46}$$

pe axa Oy, unde m este un număr întreg oarecare.

Dacă împărțim planul euclidian prin drepte paralele la cele două axe la distanță egală cu unitatea, se obține un pavaj al planului cu pătrate de latură 1.

Dacă considerăm un punct $P_0(x_0, y_0)$ în pătratul $OABC$, avem evident:

$$0 \leqslant x_0 \leqslant 1, \; 0 \leqslant y_0 \leqslant 1$$

și grupul (45), (46) transformă acest punct în puncte $Q\,(x_0 + n, y_0 + m)$, deci transformă pătratul $OABC$ în celelalte pătrate ale pavajului. Reciproc, orice pătrat al pavajului este transformatul pătratului $OABC$ printr-o transformare (45), (46).

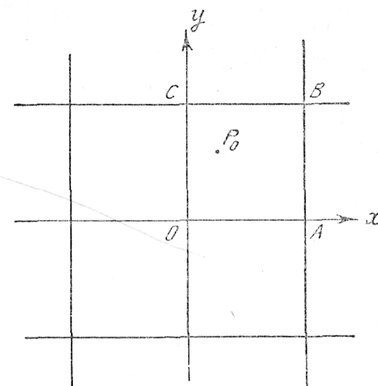


Fig. 49

A identifica punctele transformate unul în altul de grupul (45), (46) înseamnă a presupune că punctele $Q\,(x_0 + n, y_0 + m)$ sînt identice cu punctul $P(x_0, y_0)$. Dacă și în acest caz presupunem planul euclidian tăiat după dreptele indicate în fig. 49 și dacă luăm unul din pătratele obținute, de exemplu $OABC$ și îl îndoim în așa fel ca CO să se suprapună pe BA, se obține o secțiune dintr-un cilindru, OA și CB fiind două cercuri de secțiune. Dacă acum îndoim această secțiune de cilindru în așa fel ca cele două cercuri OA, CB să se suprapună, se obține o suprafață închisă analogă unei camere de cauciuc de mașină, suprafață ce se numește *tor* (fig. 50).

Rezultă că prin identificarea punctelor din planul euclidian, transformate unul în altul de translațiile (45), (46), se obține torul.

Torul este deci o suprafaţă închisă care admite planul euclidian ca suprafaţă universală de acoperire. Din punct de vedere local, planul euclidian, cilindrul şi torul au aceeaşi geometrie euclidiană. Din punct de vedere global planul euclidian, cilindrul şi torul sînt suprafeţe distincte. Prima este deschisă şi simplu conexă, a doua este deschisă însă nu este simplu conexă şi a treia este închisă şi nu este evident simplu conexă. Dacă comparăm sfera cu torul, ele sînt evident ambele suprafeţe închise, sfera însă este simplu conexă pe cînd torul nu este simplu conex.

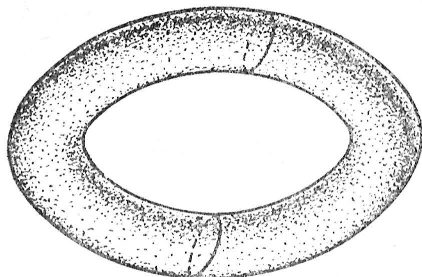


Fig. 50

Consideraţiile făcute mai sus ne arată că există trei suprafeţe pe care se poate da în întregime o geometrie euclidiană: planul euclidian, cilindrul şi torul.

Aceste suprafeţe sînt orientabile, deci au două feţe. La plan, cilindru şi tor putem deosebi o faţă de cealaltă, deci un mobil care ar fi situat pe una dintre feţe, de exemplu, pe faţa interioară a cilindrului, nu poate trece prin continuitate pe faţa exterioară; bineînţeles cilindrul se consideră întins la infinit în ambele sensuri ale generatoarelor.

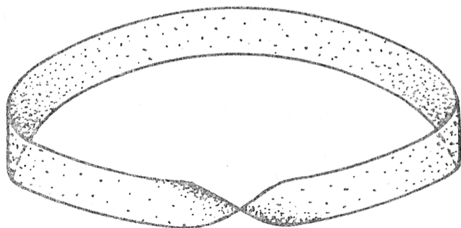


Fig. 51

Există însă şi suprafeţe neorientabile, deci ce au o singură faţă şi exemplul cel mai simplu ne este dat de banda lui Möbius. Pentru a obţine această suprafaţă să presupunem că luăm pătratul $OABC$ din fig. 49 şi îl îndoim astfel încît latura $\overline{OC}$ să se suprapună pe latura $\overline{AB}$, însă aşa fel ca C să vină în A şi O în B. Se obţine atunci suprafaţa dată în fig. 51 a unui cordon răsucit. Presupunînd că această bandă se întinde la infinit pe direcţia OC în ambele sensuri, se obţine figura denumită *cilindrul neorientabil*: operaţia de îndoire aplicată în cazul acesta revine la identificarea punctelor transformate unul în altul de transformarea:

$$x' = x + 1,\ y' = -y,$$

astfel că cilindrul neorientabil are şi el planul euclidian ca suprafaţă universală de acoperire.

Există de asemenea un tor neorientabil şi avem următoarea teoremă[1]:

Există cinci suprafeţe şi numai cinci pe care se poate da o geometrie euclidiană, şi anume trei suprafeţe deschise: planul euclidian, cilindrul propriu-zis şi cilindrul neorientabil, şi două suprafeţe închise: torul propriu-zis şi torul neorientabil.

Grupul modular. Să trecem acum la planul hiperbolic, definit în semiplanul lui Poincaré (§ 4). Am văzut că în acest caz grupul de mişcări ale spaţiului este dat de transformările (18),

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\ (\alpha\delta - \beta\gamma = 1), \tag{48}$$

în care α, β, γ, δ sînt numere reale.

Să presupunem acum că α, β, γ, δ sînt numere întregi.

Să vedem dacă o asemenea transformare poate avea puncte fixe. Punînd $z' = z$, avem ecuaţia:

$$\gamma z^2 + [\delta - \alpha]z - \beta = 0,$$

care are ca soluţii:

$$z = \frac{\alpha - \delta \pm \sqrt{(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma}}{2\gamma}.$$

Avînd în vedere condiţia $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, putem încă scrie:

$$z = \frac{\alpha - \delta \pm \sqrt{(\alpha + \delta)^2 - 4}}{2\gamma}.$$

Această formulă ne arată că dacă

$$|\alpha + \delta| \geqslant 2, \tag{48'}$$

valorile lui z sînt reale, deci punctele fixe sînt pe axa reală aşadar la infinitul geometriei. Transformările (48) cu α, δ impar şi β, γ pari formează un grup numit *grupul modular*. Pentru aceste transformări nu putem avea $\alpha + \delta = 0$, deoarece condiţia $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ ar da $\beta\gamma = -(1+\alpha^2)$ ecuaţie care nu are soluţii întregi cu β, γ pari: dacă punem $\gamma = 2n$, $\beta = 2m$, rezultă $4m = -1-\alpha^2$, deci rezultă că α trebuie să fie impar, $\alpha = 2p+1$ şi atunci obţinem ecuaţia $-4mn = 2+4p+4p^2$

[1] E. Cartan, *Leçons sur les espaces de Riemann*, Gauthier Villars, 1928, vol. III.

sau $1 + 2p + 2p^2 + 2mn = 0$ care este imposibilă. Rezultă că pentru transformările grupului modular avem $|\alpha + \delta| \geqslant 2$, căci α, δ sînt impari, deci aceste transformări au puncte fixe numai la infinitul geometriei lui Lobacevski.

Grupul modular este generat de două transformări

$$z' = z - 2, \quad z' = \frac{z}{1 - 2z}, \tag{48''}$$

în sensul că orice transformare a grupului se scrie ca un produs finit de transformări (48''). Transformările (48'') transformă dreapta

$$x = 1 \tag{49}$$

în dreapta

$$x = -1, \tag{49'}$$

respectiv semicercul de diametru $\overline{OA}$ egal cu unitatea (fig. 52).

$$x^2 + y^2 - x = 0$$

în semicercul de diametru OB

$$x^2 + y^2 + x = 0,$$

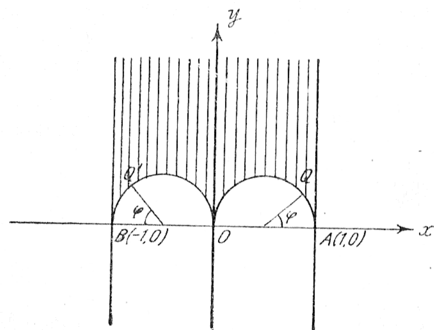


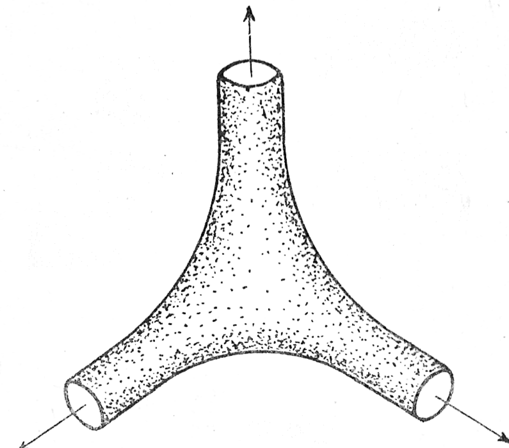
Fig. 52

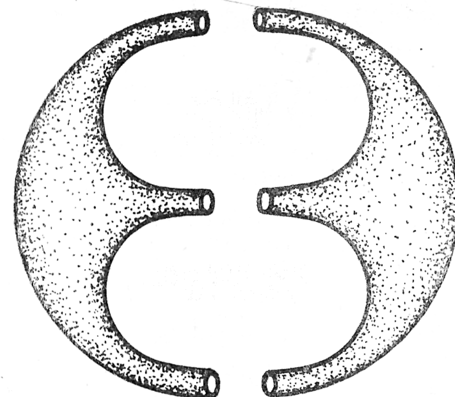
în așa fel, încît punctul A se transformă în punctul B.

Se poate arăta că orice punct din semiplanul lui Poincaré este echivalent față de grupul modular cu un punct din regiunea hașurată. Deci identificarea punctelor din plan, transformate unul în altul de grupul modular, duce la un spațiu ce se poate obține din regiunea hașurată (fig. 52), identificînd două puncte PP' situate pe dreptele $x=1$, $x=-1$, avînd ordonatele egale și două puncte Q, Q' de pe semicercurile care limitează regiunea, formînd unghiurile marcate în figură egale. Se obține atunci o suprafață de forma celei din fig. 53, unde cele trei brațe se întind fiecare la infinit în sensul săgeților. Într-adevăr, punctele A, B devin puncte singulare asemenea vîrfului pentru un con. Al treilea braț are ca vîrf punctul de la infinit al dreptelor AP, BP' și se obține în același mod în care

cilindrul se poate obține dintr-o pînză a unui con, îndepărtîndu-i vîrful.

Să observăm acum că folosind mai multe suprafețe de forma celei indicate în fig. 53 putem forma noi surafețe. Dacă de exemplu considerăm două suprafețe asemănătoare celei din fig. 53 și le lipim brațele două cîte două, (fig. 54), obținem o nouă suprafață, care nu mai este însă cu brațe infinite, ci este o suprafață închisă. Bineînțeles, acest procedeu se poate aplica într-o infinitate de moduri. După o teoremă a lui Camille-Jordan, oricum am lipi, orice număr de suprafețe asemănătoare celei din fig. 53, dacă suprafața rezultată este închisă, atunci ea se poate aduce, prin deformări fără rupturi, la forma unui disc în care s-au făcut un număr p de găuri. Figura 55 reprezintă o astfel de suprafață pentru cazul $p=3$. Este clar că suprafața din fig. 54 corespunde cazului $p = 2$. În general, p se numește *genul* suprafeței. Torul are genul 1, iar sfera — genul 0, deoarece sfera este echivalentă cu un disc în care nu s-a făcut nici o gaură.


Fig. 53


Fig. 54

În teoria funcțiilor analitice de o variabilă complexă se arată că exceptînd sfera, cilindrul și torul, orice suprafață închisă sau deschisă se poate obține din semiplanul lui Poincaré prin identificarea punctelor transformate unul în altul de transformările unui grup liniar (48), în care α, β, γ, δ nu mai sînt în general numere întregi, ci reale. Rezultă că aceste suprafețe

pot primi o metrică, care coincide local cu metrica planului lui Poincaré. Deci pe orice suprafață diferită de sferă, cilindru și tor se poate construi o geometrie, care coincide local cu geometria lui Lobacevski, deci în care suma unghiurilor unui triunghi suficient de mic este mai mică decît două unghiuri drepte etc. Două drepte de pe o astfel de suprafață pot avea însă două și chiar mai multe puncte comune.

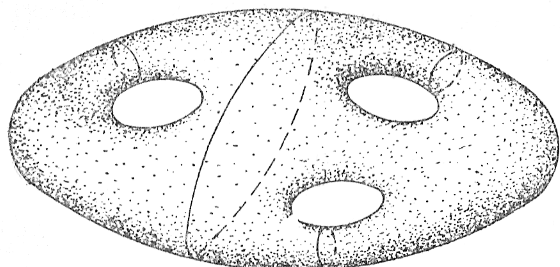


Fig. 55

Faptul că pe sferă se poate da o metrică cu curbură constantă pozitivă, că în plan, pe cilindru și pe tor se pot da metrici cu curbură nulă și că pe orice altă suprafață se poate da o metrică cu curbură constantă negativă, este în legătură cu formula lui Gauss-Bonnet. Această formulă privește suprafețele închise S de tipul celei din fig. 55, ce sînt orientabile. Dacă p este genul unei astfel de suprafețe, formula lui Gauss-Bonnet se scrie:

$$\iint_S K d\sigma = 4\pi(1-p),$$

unde am notat cu K și $d\sigma$ curbura și elementul de arie corespunzînd unei metrice oarecare a suprafeței. În cazul sferei, avem $p=0$, deci $\iint_S K d\sigma > 0$. În cazul torului, $p = 1$ și deci $\iint_S K d\sigma = 0$. În cazul $p > 1$ rezultă $\iint_S K d\sigma < 0$. Aceste relații sînt valabile, oricare ar fi metrica considerată pe suprafața respectivă, și ele sînt în particular verificate de metricile cu curbură constantă indicate mai sus.

Faptul că o aceeași suprafață poate primi mai multe metrice distincte se poate vedea considerînd o suprafață (20) în spațiul obținut cu trei dimensiuni. Ea primește atunci de la acest spațiu o metrică riemanniană. Dacă deformăm acum suprafața, ea rămîne aceeași din punctul de vedere al topologiei, dar metrica ei s-a schimbat. Formula lui Gauss-Bonnet arată că expresia $\iint_S K d\sigma$ este un invariant față de aceste deformări.

Există și un alt mod de a arăta că pe orice suprafață de gen mai mare ca unitatea se poate construi o geometrie hiperbolică.

Obținem aceste suprafețe prin operații analoge aceleia prin care am obținut torul din pătrat (v. fig. 49) luînd însă de astă dată un poligon regulat cu $4p$ laturi[1].

Avem deci teorema:

Pe orice suprafață închisă de gen $p > 1$ se poate da o geometrie hiperbolică.

Există deci o infinitate numărabilă de asemenea geometrii echivalente local și distincte topologic.

De asemenea se arată că există o infinitate de geometrii hiperbolice deschise.

În cele de mai sus ne-am ocupat de geometriile euclidiene și neeuclidiene (eliptice și hiperbolice) plane, deci cu două dimensiuni. Considerații analoge se pot face relativ la geometriile cu trei sau mai multe dimensiuni. Vom menționa astfel faptul că dacă ni se dă o sferă cu trei dimensiuni, deci o sferă în spațiul euclidian $E_4(x, y, z, t)$ cu patru dimensiuni

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = R^2,$$

există și alte grupuri discrete decît acela ce schimbă un punct în punctul diametral opus

$$x' = -x, \quad y' = -y, \quad z' = -z, \quad t' = -t, \tag{49''}$$

deci în afară de spațiul sferic și spațiul eliptic, avem și alte spații cu curbură constantă pozitivă; astfel, spațiile lenticulare se obțin identificînd punctele transformate unul în altul de rotațiile în perechile de variabile x, y; z, t date de formulele:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos\frac{2\pi p}{m} - y \sin\frac{2\pi p}{m} \\ y' &= x \sin\frac{2\pi p}{m} + y \cos\frac{2\pi p}{m} \\ z' &= z \cos\frac{2\pi q}{m} - t \sin\frac{2\pi q}{m} \\ t' &= z \sin\frac{2\pi q}{m} + t \cos\frac{2\pi q}{m}, \end{aligned} \tag{50}$$

---

[1] Vezi N. V. Efimov, Geometrie superioară, Editura Tehnică, București, 1952 p. 295.

unde p, q, m sînt numere întregi și p, q sînt mai mici ca m. Se poate de altfel observa că pentru $p = q = 1$, $m = 2$, transformarea (50) coincide cu (49″), deci spațiul lenticular coincide, în acest caz, cu spațiul eliptic.

Este de asemenea de observat că spațiul eliptic S_3 este orientabil, în timp ce, după cum am văzut mai înainte, planul eliptic S_2 este neorientabil și proprietatea se generalizează pentru orice n în sensul că spațiul eliptic S_n cu n par este neorientabil, în timp ce spațiul eliptic S_n cu n impar este orientabil. De asemenea, se menține proprietatea că pentru n par există numai două geometrii cu curbură constantă pozitivă, geometria sferică și geometria eliptică.

Vom menționa, de asemenea, faptul că într-un spațiu euclidian E_3 există și alte grupuri discrete decît translațiile. Ele sînt formate din ceea ce putem numi rototranslații. Un asemenea grup este generat de transformarea :

$$\begin{aligned} x' &= x + a, \\ y' &= y \cos \theta - z \sin \theta, \\ z' &= y \sin \theta + z \cos \theta, \end{aligned} \tag{50′}$$

unde $a \neq 0$ și θ este un unghi oarecare. Identificînd punctele echivalente față de acest grup se obține un spațiu deschis analog cilindrului. Un grup discret conduce la un spațiu închis dacă conține translații în trei direcții necoplanare. Se poate arăta că pentru ca grupul (50′) să poată forma cu translații de-a lungul variabilelor y, z un grup discret, trebuie ca θ să fie de forma $2\pi/m$, unde m are una dintre valorile 1, 2, 3, 4, 6, cazul $m = 1$ corespunzînd la o translație de-a lungul axei x. De asemenea, se arată că două rototranslații de axe diferite port forma un grup discret numai dacă $m = 1, 2$ pentru fiecare dintre ele.

Spațiul obținut identificînd punctele transformate de unul dintre aceste grupuri este un spațiu închis și unul din cele mai simple dintre aceste spații este torul cu trei dimensiuni, deci spațiul închis care se obține din spațiul euclidian identificînd punctele echivalente prin trei translații unitare pe cele trei axe Ox, Oy, Oz.

Ca domeniu fundamental al acestui spațiu avem cubul de latură 1, așa cum torul obișnuit are ca domeniu fundamental pătratul de latură 1.

Produs de spații. Spații fibrate. Dacă avem două spații euclidiene E_n și E_m de dimensiune n și m, în primul avînd coordonatele carteziene $x^1, \ldots, x^n$ și în al doilea coordonatele $y^1, \ldots, y^m$, spațiul ale cărui puncte sînt definite de numerele $x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^m$ este un spațiu cu $n + m$ dimensiuni și se numește *spațiul produs* al spațiilor E_n, E_m și se notează cu $E_{n+m} = E_n \times E_m$. Astfel, planul

euclidian este produsul a două spații euclidiene cu o dimensiune, deci produsul a două drepte euclidiene. Spațiul E_3 este produsul a trei drepte euclidiene sau produsul unei drepte euclidiene cu un plan euclidian. De asemenea, torul obișnuit poate fi considerat ca produsul a două cercuri, sau dacă vrem a două drepte proiective.

De asemenea, torul din spațiul E_3 este produsul a trei cercuri, în timp ce torul din spațiul euclidian E_n, deci suprafața închisă ce se obține identificînd punctele echivalente prin n translații pe n axe ortogonale din spațiu, este produsul a n cercuri.

Operația inversă a produsului conduce la ceea ce putem numi *spațiu cît* sau *spații fibrate*. Fie de exemplu planul euclidian raportat la coordonate carteziene ortogonale Oxy. Să presupunem că fiecărui punct $P(x, y)$ din plan îi facem să corespundă proiecția lui $Q(x, 0)$ pe axa x. Avem atunci o corespondență care face ca la orice punct din plan să corespundă un punct Q, de pe Ox însă invers punctului Q îi corespund o infinitate de puncte din planul Oxy, și anume punctele situate pe dreapta d ce trece prin Q și este paralelă cu axa Oy. Se zice atunci că planul Oxy este un spațiu fibrat, că Ox este baza spațiului, în timp ce dreptele d sînt fibrele. În mod analog cercul se obține din torul obișnuit printr-o fibrare, în care fibrele sînt cercuri, una dintre familiile de cercuri al căror produs ne dă torul. Pentru ca spațiile obținute prin fibrare să aibă proprietăți geometrice interesante, se cere ca fibrele diferitelor puncte ale spațiului fibrat să fie asemenea, deci să se obțină una din alta prin transformările unui grup. În cazul spațiului Oxy considerat mai sus, grupul care transformă dreptele paralele cu Oy una în alta este grupul translațiilor de-a lungul axei x, deci de-a lungul bazei.

Printre spațiile fibrate care conduc la spații interesante sînt spațiile fibrate de sfere. Dacă avem o sferă în spațiul euclidian cu patru dimensiuni atunci există pe o asemenea sferă o familie de cercuri mari ale sferei, care, fiind considerate ca fibre, deci fiind considerate ca un punct unic, ne conduc la dreapta proiectivă complexă. Într-adevăr să considerăm două cantități z_1, z_2 numere complexe. Aceste cantități determină o varietate cu patru dimensiuni, căci dacă punem :

$$z_1 = x + iy, \quad z_2 = u + iv,$$

sîntem în prezența a patru coordonate reale x, y, u, v.

Să presupunem că z_1, z_2 sînt considerate coordonate omogene, deci că nu sînt ambele nule și că sînt determinate abstracție făcînd de un factor de proporționalitate. Dacă z_1, z_2 ar fi reale, am avea dreapta proiectivă reală (cap. I, § 8). Dacă z_1, z_2 sînt complexe, se zice că punctele avînd z_1, z_2 drept coordonate omogene sînt *punctele dreptei proiective complexe*.

Ținînd seamă că z_1, z_2 sînt determinate, abstracție făcînd de un factor, rezultă că putem utiliza acel factor ca să normalizăm coordonatele z_1, z_2, impunînd condiția:

$$z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 = x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 1.$$

Această normalizare determină coordonatele z_1, z_2 abstracție făcînd de un factor de modul 1, deci de forma $e^{i\varphi}$, unde φ este un număr oarecare.

Să presupunem că $z_2 \neq 0$, deci $u^2 + v^2 \neq 0$ și să considerăm pe dreapta proiectivă complexă coordonata neomogenă

$$Z = X + iY = \frac{z_1}{z_2}.$$

Să înmulțim în membrul al doilea și la numărător și la numitor cu $\bar{z}_2$, care este evident de asemenea diferit de zero. Avem atunci

$$X + iY = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{(x + iy)(u - iv)}{u^2 + v^2},$$

ceea ce ne dă, egalînd părțile reale și părțile imaginare:

$$X = \frac{xu + yv}{u^2 + v^2}, \quad Y = \frac{-xv + yu}{u^2 + v^2}, \tag{50''}$$

ceea ce ne spune că la orice punct al sferei S_3

$$x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 1$$

din spațiu euclidian $E_4(x, y, u, v)$ corespunde un punct X, Y al dreptei complexe de coordonate omogene z_1, z_2.

Ținînd seama că din formulele (50'') rezultă:

$$X^2 + Y^2 + 1 = \frac{1}{u^2 + v^2}$$

putem lua:

$$u = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}, \quad v = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}, \tag{50'''}$$

și atunci formulele (50'') ne dau:

$$x = \frac{X\cos\varphi - Y\sin\varphi}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}, \quad y = \frac{X\sin\varphi + Y\cos\varphi}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}. \tag{50^{IV}}$$

Aceste formule împreună cu formulele (50''') ne spun că la orice punct $Z = X + iY$ al dreptei complexe corespund o infinitate de puncte ale sferei S_3, infinitate care depinde de unghiul φ. Toate aceste puncte se găsesc pe un cerc mare al sferei S situat în planul $x = Xu - Yv$, $y = Xv - Yu$ care se obține prin combinația formulelor (50''') și (50^{IV}).

În concluzie rezultă deci că la puncte ale dreptei complexe corespund anumite cercuri mari de pe sfera S_3. Pentru a avea o corespondență biunivocă, se convine ca fiecare dintre aceste cercuri să fie considerat ca un unic punct.

Dreapta complexă apare deci ca o fibrare a sferei S_3, printr-o familie de cercuri mari.

Considerații analoge au loc pentru planul proiectiv complex, care se poate considera ca o fibrare prin cercuri mari a sferei S_5 din spațiul euclidian E_6 etc. Există și spații fibrate în care fibrele să fie nu curbe, ci varietăți cu două sau mai multe dimensiuni[1].

Varietăți diferențiabile. Considerațiile pe care le-am făcut în acest paragraf ne permit să ajungem la noțiunea de varietate diferențială cu n dimensiuni, care este noțiunea de bază a geometriei diferențiale moderne. Se numește *varietate diferențiabilă* o mulțime numărabilă de vecinități, înzestrate fiecare cu un sistem de coordonate, un punct al varietății aparținînd la cel puțin una dintre aceste vecinătăți. Dacă el aparține la două vecinătăți, transformarea de coordonate care face să se treacă de la una la alta din vecinătăți este o transformare diferențiabilă. Se numește vecinătate mulțimea de puncte în corespondență biunivocă și continuă cu punctele unui spațiu euclidian cu n dimensiuni. Deci dacă $V(x^1, \ldots, x^n)$ și $V'(x'^1, \ldots, x'^n)$ sînt două asemenea vecinătăți și un punct P al varietății aparține și lui V și lui V', atunci între coordonatele x și x' există o transformare

$$x'^i = x'^i(x^1, \ldots, x^n)$$

continuă și diferențiabilă. Să considerăm ca exemplu cazul sferei

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Am văzut (v. fig. 41) că prin proiecție stereografică obținem o corespondență biunivocă și continuă a sferei pe un plan euclidian și avem formulele (21'') și (21'''), care se scriu:

$$x = \frac{u}{1 + \frac{k}{4}(u^2 + v^2)}, \quad y = \frac{v}{1 + \frac{k}{4}(u^2 + v^2)},$$
$$z = -\frac{1}{\sqrt{k}} \frac{1 - \frac{k}{4}(u^2 + v^2)}{1 + \frac{k}{4}(u^2 + v^2)}, \quad k = \frac{1}{R^2}. \tag{51}$$

[1] G. Vrănceanu, *Lecții de geometrie diferențială*, Editura Academiei, București, 1951, vol. II, cap. VI.

Această corespondență nu este însă fără excepție, și anume Polul Nord, nu are un corespondent în planul euclidian $E_2(u, v)$, deci un punct de coordonate finite u, v.

Să considerăm atunci proiecția stereografică a sferei din Polul Sud pe planul tangent în Polul Nord. Notînd cu u', v' coordonate în acel plan, obținem formulele:

$$x = \frac{u'}{1 + \frac{k}{4}(u'^2 + v'^2)}, \quad y = \frac{v'}{1 + \frac{k}{4}(u'^2 + v'^2)},$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{1 - \frac{k}{4}(u'^2 + v'^2)}{1 + \frac{k}{4}(u'^2 + v'^2)}.$$

Aceste formule ne arată că dacă notăm cu $P(u, v)$ punctul din planul $E_2(u, v)$ și cu $Q(u', v')$ punctul din planul $E'_2(u', v')$ care corespund la un același punct de pe sferă și ținem seama că unghiurile din M sînt drepte, căci triunghiul NSM este înscris într-o jumătate de sferă, rezultă atunci că triunghiurile dreptunghice NSP' și SNP sînt asemenea și că avem deci:

$$\frac{\overline{NP'}}{\overline{NS}} = \frac{\overline{NS}}{\overline{SP}}.$$

Prin urmare avem formula:

$$\overline{SP} \cdot \overline{NP'} = \overline{NS}^2 = 4R^2,$$

ceea ce ne conduce la formulele:

$$u' = \frac{4}{k} \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad v' = \frac{4}{k} \frac{v}{u^2 + v^2}. \qquad (51')$$

formule ce reprezintă o inversiune, dacă proiectăm planul $E'_2(u', v')$ pe planul $E_2(u, v)$. Trecerea de coordonate de la vecinătatea $E_2(u,v)$ la vecinătatea $E'_2(u', v')$ este așadar dată de aceste formule.

Spațiul sferic este prin urmare o varietate diferențiabilă definită de două vecinătăți $E_2(u, v)$, $E'_2(u', v')$, avînd ca formule de trecere de la o vecinătate la alta formulele (51').

În mod analog, planul proiectiv se poate defini ca varietate diferențiabilă cu ajutorul a trei vecinătăți care se obțin presupunînd că una sau alta dintre coordonatele omogene, care definesc planul proiectiv, este diferită de zero.

Astfel, dacă x_1, x_2, x_3 sînt coordonate omogene ale planului proiectiv, să considerăm cele trei vecinătăți V, V', V'' formate din punctele pentru care x_1, x_2 respectiv x_3 este diferit de zero; putem lua drept coordonate neomogene în V, V', V'', respectiv

$$x = \frac{x_2}{x_1}, \quad y = \frac{x_3}{x_1}$$

$$x' = \frac{x_1}{x_2}, \quad y' = \frac{x_3}{x_2}$$

$$x'' = \frac{x_1}{x_3}, \quad y'' = \frac{x_2}{x_3}$$

și atunci trecerea de coordonate de la V la V', de exemplu, este dată prin formulele:

$$x' = \frac{1}{x}, \quad y' = \frac{y}{x} \qquad (51'')$$

și formule analoge pentru (V', V'') și (V, V'').

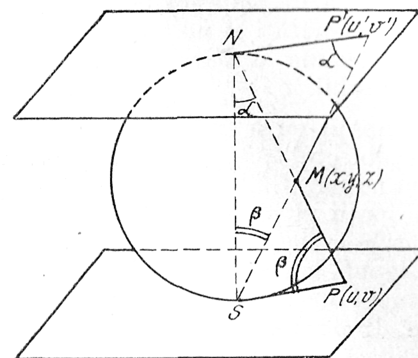


Fig. 56

În mod analog este ușor de văzut că spațiul proiectiv cu n dimensiuni poate fi definit cu $n + 1$ vecinătăți și același lucru are loc pentru spațiul proiectiv complex.

Fundamentarea teoriei varietăților diferențiabile a fost făcută de Whitney, care a arătat că o asemenea varietate se poate scufunda global într-un spațiu euclidian avînd cel mult $2n$ dimensiuni și că deci poate fi înzestrat în mai multe feluri cu o metrică definită pozitivă regulată pentru toate vecinătățile.

Relativ la exemplele pe care le-am considerat mai sus ale spațiului sferic și planului proiectiv am arătat că avem asemenea metrice considerînd formulele (22) și (25'). Există evident și altele. Metricele (22) și (25') sînt însă dintre cele mai simple și se numesc *metrice naturale*. Ele au proprietatea că sînt aceleași pentru vecinătățile E_2, E'_2 sau V, V', V'' care determină spațiul respectiv.

De asemenea, este de observat că dacă o varietate diferențiabilă este definită de un sistem de vecinătăți, ea poate fi definită și de un alt sistem, cu condiția ca să existe corespondențe biunivoce și continue între ansamblele celor două sisteme de vecinătăți.

Astfel, spațiul euclidian poate fi definit de o singură vecinătate în coordonate carteziene. Dacă se introduc coordonate curbilinii, el poate fi definit prin mai multe vecinătăți. Este însă interesant uneori de știut care este cea mai simplă formă de a alege sistemul de vecinătăți, fapt ce poate fi util în calcule. Astfel, dacă un spațiu

este închis, ca sfera, de exemplu, sau ca planul sau spaţiul proiectiv, atunci el poate fi acoperit cu un număr finit de vecinătăţi. În cazul sferei acest număr este 2 şi evident nu ar putea fi mai mic, căci o singură vecinătate nu poate defini decît un spaţiu deschis.

În cazul planului proiectiv am văzut că el poate fi acoperit cu trei vecinătăţi şi nu pot fi mai puţine, căci două vecinătăţi definesc întotdeauna o varietate orientabilă, şi planul proiectiv nu este orientabil.

Spaţii cu o infinitate de dimensiuni. Din cele expuse am văzut că obiectul propriu al geometriei îl constituie studiul spaţiilor cu un număr finit de dimensiuni. În matematică s-au considerat însă şi spaţii cu o infinitate de dimensiuni şi studiul acestor spaţii constituie obiectul analizei funcţionale. Denumirea de spaţiu dată la început acestor obiecte geometrice a fost pur convenţională; cu timpul însă s-a observat că analogia cu spaţiile cu un număr finit de dimensiuni este mai adîncă, (şi astăzi sînt matematicieni care propun să se înglobeze în geometrie şi aceste spaţii).

Am văzut la începutul acestui paragraf cum planul hiperbolic poate fi scufundat într-un spaţiu Hilbert. Spaţiile Hilbert constituie clasa cea mai simplă a spaţiilor cu o infinitate de dimensiuni. Se cunosc şi alte spaţii cu o infinitate de dimensiuni şi în special au fost mult studiate spaţiile Banach. Spaţiile Hilbert sînt spaţii vectoriale pe corpul numerelor reale sau complexe în care este definit produsul scalar [cap. I, formula (14'')]. Deci dacă avem doi vectori x, y de componente $x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n$, numărul n putînd creşte la infinit, există o formă

$$F(x, y)$$

biliniară în x^i, y^i, numită *produsul scalar al vectorilor* x, y. Dacă $x = y$, atunci se zice că $F(x, x)$ defineşte pătratul lungimii vectorului x, sau pătratul normei $|x|$ a acestui vector. În cazul spaţiilor Hilbert

$$F(x, x) = (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 + \ldots$$

este o formă pătratică definit pozitivă şi aceste spaţii se impun ca o generalizare a spaţiilor euclidiene, cînd numărul dimensiunilor creşte la infinit.

Vom menţiona de asemenea că denumirea de spaţiu este utilizată şi în topologie într-un sens foarte general, numindu-se spaţiu o mulţime de vecinătăţi ale căror elemente se numesc *puncte* şi care satisfac anumite axiome. Între altele se cere ca orice punct al spaţiului să aparţină cel puţin uneia dintre vecinătăţi şi că la două

puncte distincte să putem asocia două vecinătăţi care nu au puncte comune.

Dacă într-un asemenea spaţiu topologic se pot introduce în fiecare vecinătate un sistem de n coordonate, se ajunge la noţiunea de varietate diferenţiabilă de dimensiune n definită mai sus.

§ 8. TOPOLOGIE COMBINATORIE

Am spus în § 7 că se numesc proprietăţi topologice, acele proprietăţi ale unei figuri care rămîn invariante printr-o transformare biunivocă şi bicontinuă a figurii în ea însăşi sau într-o figură echivalentă cu ea din punct de vedere topologic.

Studiul proprietăţilor topologice, sau topologia, este deci o parte a geometriei. Această parte se ocupă astfel de proprietăţile cele mai generale ale figurilor geometrice. Începuturile topologiei pleacă de la cercetările lui Riemann, Betti şi Poincaré[1] care au încadrat topologia varietăţilor cu mai multe dimensiuni în teoria poliedrelor care constituie ceea ce se cheamă topologia combinatorie. Rezultatele acestor discipline reprezintă generalizări ale celebrei formule a lui Euler, care spune că fiind dat un poliedru convex, ale cărui feţe sînt triunghiuri, de exemplu, un tetraedru, dacă α_2 este numărul acestor triunghiuri, α_1 este numărul laturilor şi α_0 numărul vîrfurilor, atunci avem:

$$\alpha_2 - \alpha_1 + \alpha_0 = 2,$$

formulă care este evident verificată pentru un tetraedru (v. fig. 58), căci în acest caz avem:

$$\alpha_2 = 4, \qquad \alpha_1 = 6, \qquad \alpha_0 = 4.$$

Simplexe. Scopul acestui paragraf este de a studia unele proprietăţi elementare ale figurilor poliedrice şi de a arăta cum se poate introduce o clasă importantă de invarianţi topologici, clasa numerelor lui Betti.

Să observăm în primul rînd că fiind date într-un plan Oxy, două puncte P, Q segmentul deschis determinat de aceste puncte se zice că constituie un simplex de dimensiune 1, şi că frontiera acestui simplex este formată din punctele P, Q, care sînt simplexe de dimensiune zero.

[1] În ţara noastră topologia a avut ca reprezentant de seamă pe S. Stoilov [1887—1960], creator al topologiei funcţiilor de variabilă complexă. Vezi cartea sa, *Funcţii de variabilă complexă*, vol. I, II, Editura Academiei, Bucureşti, 1954, 1958.

Dacă punctele P, Q au coordonatele (a^1, a^2); (b^1, b^2), atunci un punct al dreptei PQ este dat de formulele:

$$x = \lambda a^1 + \mu b^1, \qquad y = \lambda a^2 + \mu b^2, \tag{52}$$

unde λ, μ sînt parametri satisfăcînd la ecuația:

$$\lambda + \mu = 1. \tag{52'}$$

În adevăr, eliminînd λ, μ între ecuațiile (52), (52') se obține ecuația dreptei PQ sub forma de determinant

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a^1 & a^2 & 1 \\ b^1 & b^2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{53}$$

cantitățile λ, μ se numesc coordonate baricentrice pe dreapta PQ și utilizarea lor va fi frecventă în cele ce urmează. Denumirea de coordonate baricentrice provine de la faptul că centrul de greutate a două puncte P, Q avînd respectiv masele λ, μ, satisfăcînd condiția (52'), este dat de formulele (52). Se observă că dacă λ, μ sînt pozitive și satisfac la ecuația (52'), atunci punctul $M(x, y)$ dat de formulele (52) este interior segmentului PQ. În adevăr, să presupunem, ceea ce este posibil, că $a^1 \leqslant b^1$, deci că proiecțiile P_1, Q_1 pe axa x ale punctelor P, Q se găsesc în situația că Q_1 urmează lui P_1. Să arătăm atunci că M_1, proiecția lui M pe axa x, deci punctul de coordonate $\lambda a^1 + \mu b^1$, 0, satisface condițiile:

$$a^1 \leqslant \lambda a^1 + \mu b^1 \leqslant b^1.$$

Ținînd seama de formula (52'), avem:

$$a^1 \leqslant a^1 + \mu(b^1 - a^1) \leqslant b^1.$$

Rezultă deci, scăzînd a^1 din fiecare membru al acestor inegalități că trebuie să avem:

$$0 \leqslant \mu(b^1 - a^1) \leqslant b^1 - a^1,$$

condiții ce sînt evident verificate, căci $b^1 - a^1 \geqslant 0$, $0 \leqslant \mu \leqslant 1$.

Rezultă de asemenea că dacă avem $\mu = 0$, atunci $\lambda = 1$ și deci punctul M coincide cu P, în timp ce dacă $\mu = 1$, deci $\lambda = 0$, punctul M coincide cu Q. Considerînd segmentul PQ deschis rezultă teorema:

Formulele (52), (52') *reprezintă coordonatele punctelor segmentului deschis* PQ, *dacă* $\lambda > 0$, $\mu > 0$ *și reprezintă extremitățile segmentului dacă* λ *sau* μ *sînt nule.*

Fiind date trei puncte în planul Oxy (fig. 57)

$$P_1(a_1^1, a_1^2), \ P_2(a_2^1, a_2^2), \ P_3(a_3^1, a_3^2)$$

ce formează un triunghi propriu-zis, deci pentru care determinantul

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & 1 \\ a_2^1 & a_2^2 & 1 \\ a_3^1 & a_3^2 & 1 \end{vmatrix} \tag{53'}$$

este diferit de zero, în care caz punctele se zic independente, vom putea exprima coordonatele punctelor interioare ale segmentelor $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_1P_3}$, $\overline{P_2P_3}$ prin formula (52), (52').

Să considerăm însă formulele

$$x = \lambda^1 a_1^1 + \lambda^2 a_2^1 + \lambda^3 a_3^1, \qquad y = \lambda^1 a_1^2 + \lambda^2 a_2^2 + \lambda^3 a_3^2, \qquad \lambda^1 + \lambda^2 + \lambda^3 = 1. \tag{53''}$$

Punctele $M(x, y)$ umplu în acest caz întregul plan, deoarece formulele (53'') se pot rezolva în raport cu λ^1, λ^2, λ^3 oricare ar fi x, y ținînd seama tocmai de faptul că determinantul (53') este diferit de zero. Să considerăm însă numai punctele x, y pentru care λ^1, λ^2, λ^3 sînt numere pozitive. În acest caz formulele (53'') reprezintă punctele interioare triunghiului $P_1P_2P_3$. Într-adevăr, să presupunem că punctele P_1, P_2, P_3 se găsesc în situația că proiecțiile lor pe axa x, P_1', P_2', P_3' sînt astfel așezate încît P_3' este la stînga lui P_1', P_2'.

Putem să scoatem valoarea lui λ^3 din ultima ecuație (53'') și s-o introducem în celelalte.

Punctele $M(x, y)$ depind deci de doi parametri λ_1, λ_2 și coordonatele lor sînt date de formulele:

$$x = \lambda^1(a_1^1 - a_3^1) + \lambda^2(a_2^1 - a_3^1) + a_3^1,$$

$$y = \lambda^1(a_1^2 - a_3^2) + \lambda^2(a_2^2 - a_3^2) + a_3^2;$$

cum cantitățile λ^1, λ^2, $a_1^1 - a_3^1$, $a_2 - a_3^1$ sînt pozitive, rezultă că $x - a_3^1$ este pozitiv, deci că M' este la dreapta lui P_3'.

Dacă P_3' ar fi fost la dreapta punctelor P_1', P_2', λ^1, λ^2 continuînd să fie pozitive, $a_1^1 - a_3^1$, $a_2^1 - a_3^1$ ar fi fost negative și ar fi rezultat deci că M' este la stînga lui P_3'. Rezultă deci că formulele (53''), în cazul în care λ^1, λ^2, λ^3 sînt pozitive, determină un punct în interiorul triunghiului $P_1P_2P_3$ și invers.

Dacă una sau două dintre cantitățile λ^1, λ^2, λ^3 sînt nule, formulele (54) reprezintă una dintre laturile triunghiului sau unul din vîrfuri.

Se zice că laturile și vîrfurile constituie frontiera triunghiului. În special este importantă partea din frontieră formată din laturi, înțelese ca segmente deschise. În mod analog se poate considera înspațiu un tetraedru format din 4 puncte, să zicem $P_0P_1P_2P_3$, care constituie un simplex de dimensiune 3 și atunci frontiera este formată din cele 4 fețe, din cele 6 muchii și din cele 4 vîrfuri, iar partea importantă din frontieră este formată din cele 4 fețe (fig. 58).

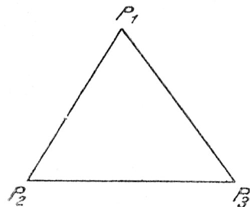


Fig. 57

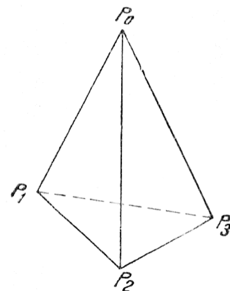


Fig. 58

În general să considerăm în spațiul euclidian E_n cu n dimensiuni un sistem de $n+1$ puncte independente $P_0, \ldots, P_n$, avînd coordonatele $a^i_\alpha (i = 1, \ldots, n, \ \alpha = 0, \ldots, n)$, deci puncte pentru care determinantul de ordinul $n+1$

$$\begin{vmatrix} a_0^1 & a_0^2 & \ldots & a_0^n & 1 \\ a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n & 1 \\ \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & & & \\ a_n^1 & a_n^2 & \ldots & a_n^n & 1 \end{vmatrix} \qquad (54)$$

este diferit de zero. În acest caz un punct $P(x^1, \ldots, x^n)$ al spațiului E_n poate fi definit prin formulele:

$$x^i = \lambda^0 a_0^i + \ldots + \lambda^n a_n^i, \quad \lambda^0 + \ldots + \lambda^n = 1,$$

și atunci $\lambda^0, \ldots, \lambda^n$ se numesc *coordonate baricentrice* ale lui P față de sistemul de puncte $P_0, \ldots, P_n$. Dacă cantitățile $\lambda^0, \ldots, \lambda^n$ iau numai valori pozitive, se obțin punctele interioare figurii denumită simplex, de ordinul n sau de dimensiune n definită de punctele $P_0, \ldots, P_n$. Dacă una sau mai multe dintre cantitățile $\lambda^0, \ldots, \lambda^n$ sînt

nule, se obțin fețele de diferite ordine ale simplexului. Să notăm cu $E_p = Q_0Q_1 \ldots Q_p$ simplexul format din $p+1$ puncte independente $Q_0, \ldots, Q_p$ din spațiul euclidian E_n. Se zice că simplexul E_p este *orientat* dacă el este definit de punctele $Q_0, \ldots, Q_p$ date într-o anumită ordine $Q_{j_0}, \ldots, Q_{j_p}$, sau o altă ordine $Q_{i_0}, \ldots, Q_{i_p}$, unde $i_0, \ldots, i_p$ se obțin din numerele $j_0, \ldots j_p$ printr-un număr par de transpoziții. Avem deci două orientări posibile ale unui simplex, date de ordinea $Q_0, \ldots, Q_p$ sau $Q_1, Q_0, \ldots, Q_p$. Se convine să se scrie $Q_1Q_0Q_2 \ldots Q_p = -Q_0Q_1Q_2 \ldots Q_p$.

Complexe. Se numește *complex simplicial* K sau mai simplu, complex K, o mulțime de simplexe care au următoarele două proprietăți:

1. Două simplexe ale complexului nu au niciodată puncte comune.
2. Dacă un simplex E aparține lui K, aparțin lui K și fețele de diferite ordine ale lui E.

Dimensiunea unui complex K este cea mai mare din dimensiunile simplexelor din K.

Ca exemplu de complex cu o dimensiune putem lua un segment închis a și atunci K este format din a și din extremitățile lui a. Ca exemplu de complex K cu două dimensiuni, avem un triunghi închis. În acest caz K este format din triunghiul T, din laturile lui T și din vîrfurile lui T.

De asemenea, putem avea ca exemple de complexe cu două dimensiuni, complexe formate din două sau mai multe triunghiuri care nu au puncte comune. Desigur ele pot avea cîte o latură comună, care face atunci parte din frontierele ambelor triunghiuri.

Să considerăm în spațiu tetraedrul dat în fig. 58. Putem considera ca complex K cu două dimensiuni, complexul format din cele 4 fețe ale tetraedrului, din cele 6 laturi și din cele 4 vîrfuri. Deci în acest complex nu intră interiorul tetraedrului, ci numai periferia lui.

Fiind dat un simplex orientat $E_p = Q_0 \ldots Q_p$, se numește *frontiera algebrică* a sa și se notează cu $F(E_p)$ suma algebrică a fețelor sale de ordinul $p-1$ dată de formula:

$$F(E_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i Q_0 \ldots Q_{i-1} Q_{i+1} \ldots Q_p, \qquad (54')$$

care se poate încă scrie:

$$F(E_p) = Q_1 \ldots Q_p - Q_0Q_2 \ldots Q_p + Q_0Q_1Q_3 \ldots Q_p + \ldots + (-1)^p Q_0 \ldots Q_{p-1} \qquad (54'')$$

şi evident avem $F(-E_p) = -F(E_p)$. Se spune că $F(E_p)$ este un lanţ de dimensiune $p-1$. În general se numeşte *lanţ* orice combinaţie liniară de simplexe de anumită dimensiune, cu coeficienţi întregi, raţionali, reali etc. Noi vom considera numai lanţuri cu coeficienţi întregi. Frontiera unui lanţ $z = \sum a_i E_q^i$ se defineşte prin formula $F(z) = \sum a_i F(E_q^i)$. Este important de observat că dacă aplicăm formulei (54′) încă o dată operatorul frontieră F, obţinem zero. În adevăr, este uşor de văzut că elementele lui $F(F(E_p))$ sînt simplexe generate de cîte $p-1$ puncte. Formula (54″) ne spune însă că simplexul definit de $Q_2 \dots Q_p$ apare în $F(F(E_p))$ o dată cu semnul plus şi o dată cu semnul minus, căci avem, punînd în evidenţă numai simplexul format din $Q_2 \dots Q_p$,

$$F(F(E_p)) = F(Q_1Q_2\dots Q_p) - F(Q_0Q_2\dots Q_p) + \dots =$$
$$= Q_2\dots Q_p - Q_2\dots Q_p + \dots,$$

deci rezultă formula:

$$F(F(E_p)) = 0. \qquad (54''')$$

Fiind dat un complex K, să notăm cu α_0 numărul punctelor sale, cu α_1 numărul simplexelor cu o dimensiune şi în general cu α_p numărul simplexelor cu p dimensiuni.

Să notăm cu $E_s^i (i = 1, \dots, \alpha_s)$ simplexele de ordinul s şi să considerăm formulele de incidenţă

$$F(E_s^i) = {}_{(s)}\eta_j^i E_{s-1}^j, \quad (s = 1, \dots, p) \qquad (55)$$

care ne spun că $F(E_s^i)$ se poate exprima cu ajutorul simplexelor E_{s-1}^j de ordinul $s-1$, căci complexul are proprietatea de a conţine toate feţele simplexelor sale.

Numerele ${}_{(s)}\eta_j^i$ sînt numere întregi ce pot fi pozitive, negative sau nule. Deci se asociază unui complex de dimensiune p un număr de p matrici

$$({}_{(s)}\eta_j^i), \quad (s = 1, \dots, p)$$

ce se numesc şi *matrici de incidenţă*. Ele ne arată cum sînt formate frontierele diferitelor simplexe din complexul K.

În cazul complexului de ordinul al doilea definit de periferia unui tetraedru, putem lua (v. fig. 58).

$$\begin{aligned} &E_2^1 = P_0P_1P_2, \ E_2^2 = P_0P_3P_1, \ E_2^3 = P_0P_2P_3, \ E_2^4 = P_1P_3P_2 \\ &E_1^1 = P_0P_1, \ E_1^2 = P_0P_2, \ E_1^3 = P_0P_3 \\ &E_1^4 = P_1P_2, \ E_1^5 = P_2P_3, \ E_1^6 = P_1P_3, \ E_0^{i+1} = P_i (i = 0, \dots, 3) \end{aligned} \qquad (56)$$

şi atunci avem două formule (55) pentru $s = 2$ şi $s = 1$, formulele ce se scriu pentru $s = 2$, ţinînd seama de formulele (56)

$$\begin{aligned} F(E_2^1) &= E_1^4 - E_1^2 + E_1^1, \\ F(E_2^2) &= -E_1^6 + E_1^3 - E_1^1, \\ F(E_2^3) &= E_1^5 - E_1^3 + E_1^2, \\ F(E_2^4) &= -E_1^5 + E_1^6 - E_1^4. \end{aligned} \qquad (57)$$

De asemenea, avem pentru $s = 1$ formulele

$$\begin{aligned} &F(E_1^1) = E_0^2 - E_0^1, \quad F(E_1^2) = E_0^3 - E_0^1, \\ &F(E_1^3) = E_0^4 - E_0^1, \quad F(E_1^4) = E_0^3 - E_0^2, \\ &F(E_1^5) = E_0^4 - E_0^3, \quad F(E_1^6) = E_0^4 - E_0^2. \end{aligned} \qquad (57')$$

Deci, în acest caz matricea ${}_{(2)}\eta$ este definită de tabloul

$$\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$$

cu 4 linii şi 6 coloane, în timp ce matricea ${}_{(1)}\eta$ este definită de un tablou cu 6 linii şi 4 coloane.

Numere Betti. Revenind la formulele (55), să notăm cu ρ_s rangurile matricilor ${}_{(s)}\eta$ înţelegînd prin rang numărul lanţurilor liniar independente ${}_{(s)}\eta_j^i E_{s-1}^j$.

În cazul ecuaţiilor (57), acest rang este 3, deci avem $\rho_2 = 3$, căci lanţurile (57) satisfac condiţia:

$$F(E_2^1) + F(E_2^2) + F(E_2^3) + F(E_2^4) = 0. \qquad (57'')$$

De asemenea, în cazul ecuaţiilor (57′) avem $\rho_1 = 3$, căci lanţurile satisfac condiţiile de dimensiune p

$$\begin{aligned} F(E_1^4) + F(E_1^1) &= F(E_1^2) \\ F(E_1^5) + F(E_1^2) &= F(E_1^3) \\ F(E_1^6) + F(E_1^1) &= F(E_1^3). \end{aligned}$$

Se asociază deci în general p numere întregi ρ_s unui complex K de dimensiune p și se pot scrie numerele R_s date de formulele:

$$R_0 = \alpha_0 - \rho_1,\ R_1 = \alpha_1 - \rho_1 - \rho_2, \ldots,$$

$$R_{p-1} = \alpha_{p-1} - \rho_{p-1} - \rho_p, \quad R_p = \alpha_p - \rho_p, \tag{58}$$

care se numesc *numerele Betti* asociate complexului K.

Aceste numere au o importanță foarte mare, căci se arată că ele sînt invarianți topologici, deci că au aceleași valori pentru două complexe echivalente topologic.

În primul rînd se arată că numerele R sînt invariante la o diviziune baricentrică a complexului K, care face ca complexul K să fie înlocuit cu un complex K', format din simplexe obținute adăugînd punctelor lui K centrele de greutate ale diferitelor simplexe din complex. Dacă sîntem în cazul unui complex format dintr-un simplex PQ de dimensiune 1, deci din segmentul PQ și din extremitățile sale, P, Q, complexul K va fi format din segmentele PC, CQ, unde C este mijlocul segmentului PQ, și din punctele P, Q, C.

Să presupunem acum că avem un complex K de dimensiune 1 format deci din α_0 vîrfuri și din α_1 segmente. Formulele de incidență sînt în acest caz date de ecuațiile:

$$F(P_iP_j) = P_j - P_i, \tag{59}$$

unde P_iP_j este unul din segmentele complexului.

Dacă introducem în acest segment centrul lui de greutate P', atunci lanțul $F(P_iP_j)$ este înlocuit cu două lanțuri:

$$F(P_iP') = P' - P_i, \quad F(P'P_j) = P_j - P'.$$

Aceste lanțuri nu sînt independente de (59), deoarece avem:

$$F(P_iP') + F(P'P_j) = F(P_iP_j);$$

rezultă deci că pe lîngă ecuațiile (59) se asociază α_1 ecuații noi independente de (59). Dacă ρ_1 este rangul matricei definite de ecuațiile (59) și ρ_1' este rangul corespunzător ecuațiilor de incidență în K', avem:

$$\rho_1' = \rho_1 + \alpha_1.$$

De asemenea, notînd cu α_0', α_1' numerele corespunzătoare pentru K', avem evident:

$$\alpha_0' = \alpha_0 + \alpha_1,\ \alpha_1' = 2\alpha_1.$$

Ținînd seama de formulele (58), care se scriu în cazul nostru:

$$R_0 = \alpha_0 - \rho_1, \quad R_1 = \alpha_1 - \rho_1,$$

rezultă că avem:

$$R_0' = \alpha_0' - \rho_1' = \alpha_0 - \rho_1 = R_0, \quad R_1' = \alpha_1' - \rho_1' = \alpha_1 - \rho_1 = R_1.$$

Deci am demonstrat astfel că în cazul complexelor de dimensiune 1 numerele lui Betti sînt invariante la o diviziune baricentrică.

Să considerăm cazul unui complex de dimensiune 2. În acest caz, fiecare simplex de dimensiune 2, $P_1P_2P_3$ se descompune prin centrul său de greutate Q' și prin centrele de greutate P_1', P_2', P_3' ale laturilor opuse vîrfurilor P_1, P_2, P_3, în șase triunghiuri (fig. 59) deci avem:

$$\alpha_2' = 6\alpha_2. \tag{60}$$

De asemenea, formulele (55) fac să corespundă fiecărui lanț

$$F(P_1P_2P_3)$$

șase lanțuri $F(P_iP_j'Q')$, unde P_j' este mijlocul uneia dintre laturile adiacente lui P_i și Q' este centrul de greutate al triunghiului. Aceste șase lanțuri nu sînt însă independente de $F(P_1P_2P_3)$, deoarece avem:

$$F(P_3P_1'Q') - F(P_3P_2'Q') +$$
$$+ F(P_1P_2'Q') - F(P_1P_3'Q') - F(P_2P_1'Q') +$$
$$+ F(P_2P_3'Q') = F(P_1P_3P_2).$$

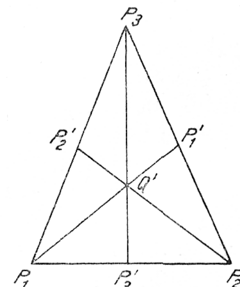


Fig. 59

Rezultă deci că avem:

$$\rho_2' = \rho_2 + 5\alpha_2. \tag{60'}$$

De asemenea, avem evident formulele:

$$\alpha_0' = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2,\ \alpha_1' = 2\alpha_1 + 6\alpha_2, \tag{60''}$$

deoarece la fiecare segment și la fiecare triunghi se adaugă un punct nou, iar fiecare segment este înlocuit cu două segmente, în timp ce un triunghi introduce 6 noi segmente care unesc centrul de greutate cu cele 6 puncte de pe frontiera triunghiului. De asemenea avem formula:

$$\rho_1' = \rho_1 + \alpha_1 + \alpha_2, \tag{60'''}$$

deoarece fiecare latură şi fiecare triunghi introduc cîte o ecuaţie independentă în ecuaţiile $P'_i - P'_j$ unde P' sînt puncte ale lui K' în afară de acele provenite din K.

Rezultă atunci şi în acest caz formulele:

$$\alpha'_0 = \rho'_1 = \alpha_0 - \rho_1, \quad \alpha'_1 - \rho'_1 - \rho'_2 = \alpha_1 - \rho_1 - \rho_2,$$
$$\alpha'_2 - \rho'_2 = \alpha_2 - \rho_2,$$

deci numerele lui Betti R_0, R_1, R_2 sînt invariante la o diviziune baricentrică şi în cazul unui complex de ordinul al doilea.

În mod analog se arată că fiind dat un complex K de ordinul al treilea, deci format din vîrfuri, muchii, feţe şi tetraedre, dacă considerăm complexul K' obţinut prin diviziunea baricentrică, avem formulele:

$$\begin{aligned} &\alpha'_0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ &\alpha'_1 = 2\alpha_1 + 6\alpha_2 + 14\alpha_3 \\ &\alpha'_2 = 6\alpha_2 + 36\alpha_3, \quad \alpha'_3 = 24\alpha_3 \\ &\rho'_1 = \rho_1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ &\rho'_2 = \rho_2 + 5\alpha_2 + 13\alpha_3, \quad \rho'_3 = \rho_3 + 23\alpha_3, \end{aligned} \tag{61}$$

care ne spun că şi în acest caz numerele Betti sînt invariante la o diviziune baricentrică, şi proprietatea este adevărată în general, deci şi pentru un complex de ordinul $p > 3$.

Să introducem acum o noţiune topologică importantă relativ la complexe, şi anume noţiunea de *conexitate*.

Un complex K se zice *conex*, dacă de la orice punct al complexului, să zicem P_1, se poate trece la un punct oarecare parcurgînd segmente ale complexului. Dacă acest lucru nu este posibil, complexul K se zice *neconex* şi atunci el este format din două sau mai multe componente conexe. În adevăr, punctele din complex ce se obţin dintr-un punct P_1 parcurgînd segmente ale complexului formează o componentă a complexului. O altă componentă conţine punctele ce se obţin dintr-un alt vîrf etc. Rezultă deci că un complex neconex este format din $h > 1$ componente conexe. Să presupunem complexul K conex şi fie

$$P_1, P_2, \ldots, P_{\alpha_0} \tag{62}$$

o înşiruirea punctelor complexului care face să se treacă de la P_1 la P_{α_0}, astfel că în această înşiruire un vîrf oarecare apare cel puţin o dată şi două puncte vecine să fie extremităţile unui segment din complex. Să arătăm că în acest caz matricea ${}_{(1)}\eta$ este de rang $\alpha_0 - 1$.

Aceasta revine a arăta că printre lanţurile

$$F(P_iP_j) = P_j - P_i$$

avem un număr de $\alpha_0 - 1$ lanţuri independente. Într-adevăr, pentru orice segment P_iP_j al complexului K, cu $j > i$ putem scrie:

$$F(P_jP_i) = F(P_jP_{j-1}) + F(P_{j-1}P_{j-2}) + \ldots + F(P_{i+1}P_i),$$

şi fiecare termen din membrul al doilea apare în frontiera unui segment din înşiruirea (62). Avem deci $\rho_1 = \alpha_0 - 1$ lanţuri frontieră liniar independente, anume $F(P_1P_2)$, $F(P_2P_3)$, $\ldots$, $F(P_{\alpha_0-1}, P_{\alpha_0})$. Avem deci teorema:

Pentru un complex conex K, numărul R_0 al lui Betti este egal cu 1.

Dacă complexul nu este conex şi are h componente conexe, atunci este evident că avem $R_0 = h$.

Să presupunem complexul K conex, deci admiţînd o înşiruire (62) unde $\alpha_0 > p + 1$, p fiind dimensiunea lui K, deci K nu este un simplex, şi să considerăm două simplexe ale sale E_p şi S_p de dimensiune p. Să zicem că avem:

$$E_p = P_1 \ldots P_pP_{p+1}, \quad S_p = -P_1 \ldots P_pP_{p+2}.$$

Se vede atunci că E_p şi S_p sînt incidente şi că în formulele de incidenţă (55) în $F(E_p)$ şi $F(S_p)$ intră simplexul $E_{p-1} = P_1 \ldots P_p$ o dată cu semnul $+$ şi o dată cu semnul $-$, deci în formula $F(E_p) + F(S_p)$ simplexul E_{p-1} dispare. Dacă un complex K de dimensiunea p poate fi orientat în aşa fel, ca în matricea de incidenţă ${}_{(p)}\eta$ fiecare simplex E_{p-1} să apară o dată cu semnul $+$ şi o dată cu semnul $-$, complexul K se zice *orientabil*. În acest caz avem:

$$\sum_{i=1}^{\alpha_p} F(E^i_p) = 0, \tag{62'}$$

şi deci rangul matricei ${}_{(p)}\eta$ este α_{p-1}.

În adevăr, acest rang nu poate fi mai mic decît α_{p-1}, deci nu pot exista alte condiţii între $F(E^i_p)$ diferite de (62'), căci în lanţurile $F(E^i_p)$ intră toate simplexele E^i_{p-1} formate din p puncte ale înşiruirii (62) şi aceste puncte sînt în număr mai mare decît $p + 1$.

Rezultă deci că fiind dat un complex orientabil conex de dimensiune p cu $\alpha_0 > p + 1$, numărul lui Betti R_p este de asemenea egal cu 1. Dacă complexul este orientabil, însă nu este conex, şi nici o componentă a sa nu este un simplex, atunci avem $R_p = h$. Deci avem în general pentru complexele orientabile $R_p = R_0$, formulă

care reprezintă un caz particular al formulelor generale ale lui Poincaré;

$$R_s = R_{p-s} \quad (s = 0, \ldots, p),$$

care constituie ceea ce se numesc *formulele de dualitate* și care se demonstrează presupunînd că punctele simplexelor K formează o varietate.

Formula lui Euler-Poincaré. Ținînd seama de formulele (58) rezultă că există o combinație a numerelor lui Betti, care nu depinde de rangurile matricelor de incidență. În adevăr, avem formula

$$R_0 - R_1 + R_2 + \ldots (-1)^p R_p = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots (-1)^p \alpha_p. \quad (63)$$

care se zice că constituie formula lui Euler-Poincaré, deoarece pentru complexe de dimensiune doi obținem formula (51) a lui Euler, care ne spune dacă avem un poliedru format din fețe triunghiulare, numărul fețelor plus numărul vîrfurilor întrece cu două unități numărul muchiilor.

Lanțuri și cicluri. Fiind dat un complex K de dimensiune p, format deci din simplexe $E_s^i (i = 1, \ldots, \alpha_s, \; s = 0, \ldots, p)$, considerînd simplexele de un anumit ordin, de exemplu acelea de dimensiune p, se poate forma cu ele o combinație

$$C_p = \sum_{i=1}^{\alpha_p} a_i E_p^i, \quad (64)$$

unde a_i sînt numere întregi. Se spune atunci că C_p este un lanț de dimensiune p al complexului K. Mai precis, C_p este un lanț în raport cu numerele întregi.

Se pot considera și lanțuri în raport cu numere fracționare sau reale, dar nu ne vom ocupa de aceste lanțuri. Se pot considera de asemenea lanțuri în raport cu anumite clase de numere întregi, de exemplu pentru care a_i sînt determinate, abstracție făcînd de un multiplu de un număr prim m. În particular este interesant cazul în care a_i sînt determinate, abstracție făcînd de un număr par. În acest caz se presupune că numerele a_i sînt 0 sau 1.

Am arătat că fiind dat un lanț C_p, se numește frontieră a lui C_p și se notează cu $F(C_p)$ expresia:

$$C_{p-1} = F(C_p) = \sum_{i=1}^{\alpha_p} a_i F(C_p^i).$$

Dacă această frontieră este nulă, se zice că lanțul este un ciclu. În cazul unui complex orientabil, suma simplexelor de dimensiune p este un ciclu, cum ne arată formula (62'). De asemenea, frontiera oricărui simplex de dimensiune p este un ciclu, cum reiese din formula (54'''). Un ciclu poate proveni dintr-un ciclu frontieră sau nu.

Să considerăm acum α_p lanțuri $C_p^i (i = 1, \ldots, \alpha_p)$ față de numerele întregi, deci α_p combinații liniare

$$C_p^i = \sum_{j=1}^{\alpha_p} a_j^i E_p^j \quad (64')$$

cu a_j^i numere întregi.

Aceste lanțuri se zice că constituie o bază de ordinul p pentru complexul K, dacă formulele (64') se pot rezolva în raport cu E_p^j, deci dacă avem formule de forma:

$$E_p^j = \sum_{i=1}^{\alpha_p} b_i^j C_p^i,$$

unde b_i^j sînt de asemenea numere întregi. Evident că pentru aceasta este necesar și suficient ca determinantul $|a_j^i|$ să fie egal cu 1 sau -1.

Fiind dat un complex K se poate arăta că putem alege cîte o bază pentru simplexele de diferite dimensiuni, în așa fel ca formulele de incidență să cuprindă atît în primul membru cît și în membrul al doilea un singur lanț al bazei sau să fie zero, deci să avem pentru matricea ${}_{(p)}\eta$ formulele:

$$\begin{aligned} F(C_p^i) &= d_i C_{p-1}^i \quad (i = 1, \ldots, \rho_p) \\ F(C_p^i) &= 0 \quad (i = \rho_p + 1, \ldots, \alpha_p), \end{aligned} \quad (65)$$

unde d_i sînt numere întregi diferite de zero. Ținînd seama de formula $F(F(C_p^i)) = 0$, rezultă că avem:

$$F(C_{p-1}^i) = 0, \quad (i = 1, \ldots, \rho_p); \quad (65')$$

în ceea ce privește celelalte lanțuri $F(C_{p-1}^i)$ $(i > \rho_{p1})$, ele se pot pune de asemenea sub o formă canonică (65), deci în așa fel ca să avem relații de forma

$$\begin{aligned} F(C_{p-1}^i) &= e_i C_{p-2}^i, \quad (i = \rho_p + 1, \ldots, \rho_p + \rho_{p-1}), \\ F(C_{p-1}^i) &= 0, \quad (i = \rho_p + \rho_{p-1} + 1, \ldots, \alpha_{p-1}), \end{aligned} \quad (65'')$$

e_i fiind numere întregi. Aceste formule ne arată că dacă interpretăm cele α_p simplexe E^i_p ale complexului K, drept generatorii unui grup comutativ G, de exemplu, un grup format din translații cu componente întregi într-un spațiu cu α_p dimensiuni, atunci C_p este o translație oarecare din G și grupul G are un subgrup H format din lanțurile ce sînt cicle, deci pentru care $F(C^i_p) = 0$ și grupul H are $R_p = \alpha_p - \rho_p$ generatori, deci numărul R_p al lui Betti apare ca numărul generatorilor grupului H definit de cicluri de ordin p.

În mod analog formulele (65′) ne arată că numărul

$$R_{p-1} = \alpha_{p-1} - \rho_{p-1} - \rho_p$$

reprezintă numărul maxim de cicluri de dimensiune $p-1$ pentru care nici o combinație liniară nu este un multiplu de o frontieră și proprietatea se menține în general. Avem astfel o posibilitate de a defini numerele lui Betti, ca ranguri ale unor grupuri comutative, care se asociază unui complex. Aceste grupuri se numesc *grupuri Betti*.

Dar să revenim la primele formule (65). Putem presupune evident că numerele d_i sînt scrise în ordine descrescătoare, deci că avem:

$$d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_{\rho_p}.$$

Dacă vreunul din aceste numere este mai mare decît unitatea, el se zice că constituie o *torsiune* sau un *număr torsional*. De asemenea sînt torsiuni numerele e_i mai mari ca unitatea etc. Torsiunile sînt și ele invariante la diviziunea baricentrică și constituie de asemenea invarianți topologici ai complexului. Vom observa doar că la o torsiune, să zicem $d_1 > 1$, se asociază un lanț C, astfel încît multiplul său d_1C este o frontieră. Se spune că C este de ordin finit, ca o rotație de unghi $2\pi/d_1$ a cărei putere de ordinul d_1 este transformarea identică.

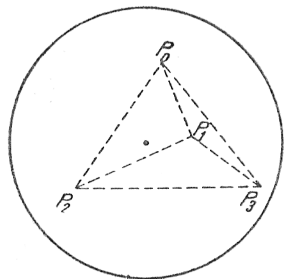


Fig. 60

Am spus că numerele lui Betti și numerele torsionale constituie invarianți topologici ai complexelor.

Aceste numere sînt invarianți nu numai la diviziunile baricentrice, care transformă un complex dat în alt complex, cu fețe și muchii oricît de mici vrem, ci și față de deformările continue ale complexului într-un alt complex cu fețe curbilinii. Exemplul cel mai simplu și sugestiv este acela dat de complexul K, considerat mai sus în fig. 58 și format din fețele unui tetraedru $P_0P_1P_2P_3$. Presupunînd că vîrfurile tetraedrului sînt pe o sferă (fig. 60), se poate considera complexul K^* format din fețele curbe care se obțin proiectînd complexul K pe sferă, din centrul sferei. Există evident o corespondență biunivocă și continuă între punctele tetraedrelor K și K^*; una dintre aceste corespondențe este proiecția din centrul sferei O a lui K în K^*. Prin diviziune baricentrică complexul K se transformă în complexul K', complex care are aceleași numere Betti ca și K. Fie acum H', complexul rectiliniu care se obține proiectînd vîrfurile lui K' pe sferă.

Complexul rectiliniu H' are aceeași așezare a fețelor ca și K', deci formulele de incidență sînt aceleași, așadar H' și K' au aceleași numere Betti.

Considerînd diviziunea baricentrică a lui H' se obține prin proiecție un complex H'' rectiliniu și cu vîrfurile pe sferă etc. Rezultă atunci că complexele $H', H'', \ldots, H^n$ au aceleași numere Betti ca și complexul K. Să considerăm complexele corespondente pe sferă, deci complexele curbilinii corespunzătoare

$$(K^*)', \ldots, (K^*)^{(n)}, \ldots$$

Este evident că pe măsură ce n crește, complexele H^n și $(K^*)^n$ se apropie unul de altul, deoarece distanța dintre două puncte corespondente prin proiecția centrală tinde la zero. Este deci natural să considerăm că complexele $H^{(n)}$ și $(K^*)^{(n)}$ au aceleași numere Betti, deci că complexele K' și K^* au aceleași numere Betti.

În general fiind dată o suprafață, dacă ea poate fi acoperită cu un complex, numerele Betti și numerele torsionale ale complexului se consideră în același timp numere Betti și numere torsionale pentru suprafață, ceea ce este posibil datorită proprietății de invarianță a numerelor Betti față de deformări continue.

Numerele Betti ale sferei. Pentru a calcula numerele Betti ale sferei din spațiul euclidian obișnuit ne putem referi la ecuațiile (57) și (57′). Or, am arătat că (57) au $\rho_2 = 3$. În mod analog rezultă că $\rho_1 = 3$, deoarece ecuațiile (57′) se pot rezolva în raport cu E^2_0, E^3_0, E^4_0. Avem deci:

$$R_2 = 4 - 3 = 1, \quad R_1 = 6 - 3 - 3 = 0, \quad R_0 = 4 - 3 = 1.$$

Rezultă prin urmare că numerele Betti ale sferei sînt:

$$R_0 = R_2 = 1, \quad R_1 = 0. \tag{66}$$

De asemenea, dacă considerăm sfera S_n în spațiul euclidian cu $n+1$ dimensiuni ca fiind periferia unui simplex definit de punctele $P_0, \ldots, P_n$ se găsesc formulele:

$$R_0 = R_n = 1, \quad R_s = 0, \quad (s \neq 0, n). \tag{66′}$$

Să arătăm acum că pentru sfera S numerele torsionale nu există. Pentru aceasta vom observa că luînd ca lanțuri de dimensiune doi

$$C_2^i = E_2^i, \quad (i = 1, 2, 3)$$
$$C_2^4 = E_2^1 + E_2^2 + E_2^3 + E_2^4,$$

se vede că $C_2^j (j = 1, \ldots, 4)$ constituie o bază și că avem $F(C_2^4) = 0$. Să considerăm atunci ca bază pentru simplexele de dimensiune 1, baza dată de formulele:

$$C_1^1 = E_1^4 - E_1^2 + E_1^1,$$
$$C_1^2 = -E_1^6 + E_1^3 - E_1^1,$$
$$C_1^3 = E_1^5 - E_1^3 + E_1^2,$$
$$C_1^{\alpha+3} = E^\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

În acest caz formulele (57) se scriu:

$$F(C_2^i) = C_1^i, \ (i = 1, 2, 3), \ F(C_2^4) = 0,$$

ceea ce constituie o formă canonică pentru aceste formule, formă canonică în care d_i sînt toate egale cu unitatea.

Ținînd seama de aceste formule, rezultă că avem:

$$F(C_1^i) = 0, \ (i = 1, 2, 3)$$
$$F(C_1^4) = E_0^2 - E_0^1,$$
$$F(C_4^5) = E_0^3 - E_0^1,$$
$$F(C_1^6) = E_0^4 - E_0^1.$$

Luînd deci ca lanțuri de ordin zero

$$C_0^1 = E_0^1, \ C_0^\alpha = E_0^\alpha - E_0^1, \quad (\alpha = 4, 5, 6),$$

obținem o formă canonică pentru formulele (57') în care se vede că numerele torsionale de asemenea nu există.

Avem deci teorema:

Pentru sferă nu există numere torsionale.

Se arată că sfera S este complet caracterizată topologic printre suprafețele închise prin condiția ca numerele lui Betti să fie date de (66) și prin absența numerelor torsionale, dar nu se cunoaște dacă același lucru are loc sau nu pentru sferele $S_n (n \geq 3)$.

Numerele Betti și torsionale ale planului proiectiv. Am văzut în § 7 că putem considera planul proiectiv ca o varietate cu două dimensiuni, obținută din sferă identificînd punctele diametral opuse. Dacă considerăm numai o semisferă, atunci putem considera planul proiectiv ca fiind această semisferă cu condiția ca punctele diametral opuse de pe ecuator să fie considerate identice. Printr-o proiecție paralelă cu o direcție, semisfera se poate reprezenta biunivoc și continuu (topologic) pe un cerc, deci putem considera planul proiectiv ca un disc circular în care punctele diametral opuse de pe cercul frontieră sînt identificate. Să considerăm atunci trei puncte de pe cercul frontieră, fie A_1, A_2, A_3 (fig. 61) și să notăm cu aceleași litere punctele diametral opuse lor.

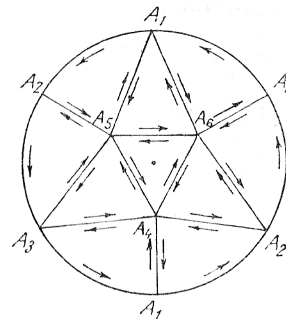


Fig. 61

Să considerăm de asemenea trei puncte interioare A_4, A_5, A_6 formînd un triunghi echilateral avînd ca centru centrul cercului în așa fel ca laturile A_5A_6, A_4A_6, A_4A_5 să fie respectiv perpendiculare diametrelor trecînd prin A_1, A_2, A_3. În acest caz, luînd punctul A_1 care este mai apropiat de A_5A_6, avem triunghiul $A_1A_5A_6$ care nu conține centrul cercului. De asemenea avem alte două triunghiuri $A_2A_6A_4$ $A_3A_4A_5$.

Să notăm aceste triunghiuri cu E_2^1, E_2^2, E_2^3 deci avem:

$$E_2^1 = A_1A_5A_6, \ E_2^2 = A_2A_6A_4, \ E_2^3 = A_3A_4A_5.$$

De asemenea, să notăm cu E_2^{10} triunghiul $A_5A_4A_6$ și cu E_2^α $(\alpha = 4, \ldots, 9)$ triunghiurile:

$$E_2^4 = A_1A_2A_4, \ E_2^5 = A_1A_4A_3, \ E_2^6 = A_2A_5A_1,$$
$$E_2^7 = A_2A_3A_5, \ E_2^8 = A_3A_1A_6, \ E_2^9 = A_3A_6A_2.$$

Avem deci în acest caz $\alpha_2 = 10$. De asemenea, se vede ușor că sînt 15 laturi, deci avem numerele:

$$\alpha_2 = 10, \ \alpha_1 = 15, \ \alpha_0 = 6$$

și este ușor de constatat că simplexele considerate pot fi orientate în așa fel ca fiecare latură interioară să fie parcursă, într-un sens și într-altul, pe cînd laturile exterioare sînt parcurse într-un singur sens. Aceasta ne spune că planul proiectiv nu este orientabil.

Pentru a calcula ρ_2, ρ_1 observăm că dacă notăm cu y_i frontierele triunghiurilor E_2^i $(i = 1, \ldots, 10)$ și prin x_i laturile triunghiurilor noastre, punînd

$$x_1 = A_5A_6,\quad x_2 = A_6A_4,\quad x_3 = A_4A_5,\quad x_4 = A_1A_5,\quad x_5 = A_1A_6$$
$$x_6 = A_3A_6,\quad x_7 = A_2A_6,\quad x_8 = A_2A_4,\quad x_9 = A_1A_4,\quad x_{10} = A_3A_4 \quad (67)$$
$$x_{11} = A_3A_5,\quad x_{12} = A_2A_5,\quad x_{13} = A_1A_2,\quad x_{14} = A_1A_3,\quad x_{15} = A_2A_3$$

avem formulele :

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - x_5 + x_4, & y_6 &= -x_4 + x_{13} + x_{13},\\ y_2 &= x_2 - x_8 + x_7, & y_7 &= x_{11} - x_{12} + x_{15},\\ y_3 &= x_3 - x_{11} + x_{10}, & y_8 &= x_5 - x_6 + x_{14}, \qquad (67')\\ y_4 &= x_8 - x_9 + x_{13}, & y_9 &= -x_7 + x_{15} + x_6,\\ y_5 &= -x_{10} - x_{14} + x_9, & y_{10} &= -x_1 - x_2 - x_3. \end{aligned}$$

Vom arăta acum că toate aceste lanțuri sînt independente, deci că $\rho_2 = 10$. Într-adevăr, dacă ar exista o relație între $y_1, \ldots, y_{10}$

$$a_1y_1 + \ldots + a_{10}y_{10} = 0, \qquad (68)$$

ținînd seama că x_1, x_2, x_3 apar succesiv numai în y_1, y_2, y_3, y_{10}, o dată cu semnul $+$ și altă dată cu semnul $-$, trebuie să avem :

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_{10},$$

căci altfel în ecuația (68) nu ar dispărea termenii în x_1, x_2, x_3. Datorită faptului că x_4 se găsește în y_1 cu semnul $+$ și în y_6 cu semnul $-$ trebuie să avem $a_1 = a_6$.

De asemenea, din cauza lui x_7 trebuie să avem $a_2 = a_9$; din cauza lui x_{11} trebuie ca $a_3 = a_7$; din cauza lui x_5 trebuie ca $a_1 = a_8$; din cauza lui x_8 trebuie ca $a_2 = a_4$ și din cauza lui x_{10} avem $a_3 = a_5$.

Deci toți a_i trebuie să fie egali. Dar suma cantităților y se scrie :

$$y_1 + \ldots + y_{10} = 2(x_{13} - x_{14} + x_{15}), \qquad (68')$$

prin urmare nu este nulă, deci y_i sînt independenți.

Cum avem $\rho_3 = 0$, căci nu există o matrice ${}_{(3)}\eta$, rezultă că numărul lui Betti R_2 este nul

$$R_2 = \alpha_2 - \rho_2 = 10 - 10 = 0.$$

Notînd cu z_i frontierele laturilor x, avem :

$$\begin{aligned} &z_1 = A_6 - A_5,\quad z_2 = A_4 - A_6,\quad z_3 = A_5 - A_4,\\ &z_6 = A_6 - A_3,\quad z_7 = A_6 - A_2\\ &z_4 = A_5 - A_1,\quad z_5 = A_6 - A_1,\quad z_9 = A_4 - A_1,\\ &z_{13} = A_2 - A_1,\quad z_{14} = A_3 - A_1 \qquad (68'')\\ &z_8 = A_4 - A_2,\quad z_{10} = A_4 - A_3,\quad z_{11} = A_5 - A_3,\\ &z_{12} = A_5 - A_2,\quad z_{15} = A_3 - A_2. \end{aligned}$$

Or, este ușor de văzut că avem aici cinci ecuații independente, de exemplu z_4, z_5, z_9, z_{13}, z_{14}. Avem deci $\rho_1 = 5$ și în consecință :

$$R_1 = \alpha_2 - \rho_1 - \rho_2 = 15 - 10 - 5 = 0.$$

De asemenea, avem :

$$R_0 = \alpha_0 - \rho_1 = 6 - 5 = 1.$$

Avem deci teorema :

Numerele R_1, R_2 ale lui Betti pentru planul proiectiv sînt nule și $R_0 = 1$.

Se poate observa că aceste numere coincid cu numerele lui Betti ale complexului format dintr-un triunghi, triunghiul fiind un simplex cu două dimensiuni. Într-adevăr se poate vedea ușor că avem pentru un triunghi :

$$\alpha_2 = 1,\quad \alpha_1 = 3,\quad \alpha_0 = 3,\quad \rho_2 = 1,\quad \rho_2 = 2,$$

și în consecință :

$$R_0 = \alpha_0 - \rho_1 = 1,\quad R_1 = \alpha_1 - \rho_1 - \rho_2 = 0,$$
$$R_2 = \alpha_2 - \rho_2 = 0.$$

Se zice că un segment este o celulă de dimensiune 1, triunghiul — o celulă de dimensiune 2, în timp ce tetraedrul este o celulă de dimensiune 3. Pentru celule, toate numerele lui Betti sînt nule afară de $R_0 = 1$. Putem spune deci că planul proiectiv are aceleași numere Betti ca o celulă de dimensiune doi.

Să punem acum pe de o parte

$$Y_i = y_i\ (i = 1, \ldots, 9);\quad Y_{10} = y_1 + \ldots + y_{10},$$

ceea ce ne spune că Y_i constituie de asemenea o bază pentru y_i. Pe de altă parte să punem:

$$X_1 = x_1 - x_5 + x_4, \qquad X_6 = - x_4 + x_{13} + x_{12}$$
$$X_2 = x_2 - x_8 + x_7, \qquad X_7 = x_{11} - x_{12} + x_{15}$$
$$X_3 = x_3 - x_{11} + x_{10}, \qquad X_8 = x_5 - x_6 + x_{14}$$
$$X_4 = x_8 - x_9 + x_{13}, \qquad X_4 = - x_7 + x_{15} + x_6 . \tag{69}$$
$$X_5 = -x_{10} - x_{14} + x_9, \qquad X_{10} = x_{13} - x_{14} + x_{15}$$
$$X_{11} = x_4,\ X_{12}, = x_5, \qquad X_{13} = x_8,\ X_{14} = x_9,$$
$$X_{15} = x_{10}.$$

Este ușor de văzut că aceste ecuații se pot rezolva în raport cu variabilele x_i prin formulele:

$$x_1 = X_1 + X_{12} - X_{11},$$
$$x_2 = X_2 + X_1 - X_6 + X_9 - X_{10} + X_{12}$$
$$x_3 = X_3 + X_5 + X_6 + X_7 - X_{10} - X_{11} - X_{14} + X_{15},$$
$$x_4 = X_{11} \qquad x_5 = X_{12},$$
$$x_6 = - X_5 - X_8 + X_{12} + X_{14} - X_{15}$$
$$x_7 = - X_4 - 2X_5 - X_8 - X_9 + X_{10} + X_{12} + X_{13} + X_{14} - 2X_{15}$$
$$x_8 = X_{13} \qquad x_9 = X_{14} \qquad x_{10} = X_{15}$$
$$x_{11} = X_5 + X_6 + X_7 - X_{10} + X_{11} - X_{14} + X_{15}$$
$$x_{12} = -X_4 + X_6 + X_{11} + X_{13} - X_{14},$$
$$x_{13} = X_4 - X_{13} + X_{14}$$
$$x_{14} = -X_5 + X_{14} - X_{15},$$
$$x_{15} = -X_4 - X_5 + X_{10} + X_{13} - X_{15}.$$

Aceste formule ne spun că X_i constituie de asemenea o bază pentru variabilele x_i. Pe de altă parte, ținînd seama de (67′) și (69), avem formulele canonice:

$$Y_i = X_i (i = 1, \ldots, 9), \quad Y_{10} = 2X_{10}, \tag{70}$$

ceea ce ne spune că unul din numerele d_i, și anume $d_{10} = 2$, prin urmare este mai mare, decît 1, deci la planul proiectiv apar torsiuni.

Să trecem acum la formulele (68″). Cum z_i sînt frontierele segmentelor (67) și cum frontierele lanțurilor $X_i (i = 1, \ldots, 10)$ sînt nule, deoarece sînt lanțuri frontieră conform formulelor (70), obținem notînd prin Z_i frontiera lui X_i:

$$Z_i = 0 \ (i = 1, \ldots, 10), \quad Z_{11} = A_5 - A_1, \quad Z_{12} = A_6 - A_1$$
$$Z_{13} = A_4 - A_2, \quad Z_{14} = A_4 - A_1, \quad Z_{15} = A_4 - A_3.$$

Punînd:

$$U_{11} = A_5 - A_1, \quad U_{12} = A_6 - A_1, \quad U_{13} = A_4 - A_2$$
$$U_{14} = A_4 - A_1, \quad A_{15} = A_4 - A_3, \quad U = A_1,$$

avem formulele:

$$A_5 = U_{11} + U, \quad A_6 = U_{12} + U, \quad A_4 = A_{14} + U,$$
$$A_2 = U_{14} - U_{13} + U, \quad A_3 = U_{14} - U_{15} + U,$$

ceea ce ne spune că U, $U_\alpha (\alpha = 11, \ldots, 15)$ constituie de asemenea o bază a punctelor $A_1, \ldots, A_6$ din complex. Or avem formulele canonice

$$Z_i = 0 \ (i = 1, \ldots, 10), \quad Z_\alpha = U_\alpha \ (\alpha = 11, \ldots, 15) \tag{70′}$$

și în consecință toate numerele e_i sînt egale cu unitatea pentru matricea $_{(1)}\eta$. Prin urmare, nu există altă torsiune decît aceea dată prin relația (68′), fapt care poate fi găsit direct. Într-adevăr, se observă că orientînd triunghiurile din fig. 61 rezultă că toate laturile interioare sînt parcurse o dată într-un sens și o dată în celălalt, în timp ce laturile exterioare A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 sînt parcurse de două ori în același sens, ceea ce ne dă formula (68′).

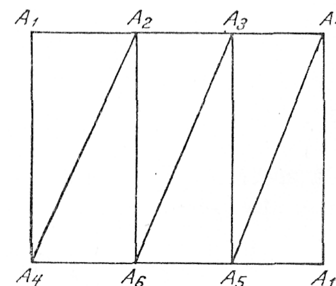


Fig. 62

Se vede deci că planul proiectiv are aceleași numere ale lui Betti ca și un simplex cu două dimensiuni, însă are torsiuni, în timp ce simplexul este fără torsiuni.

Să considerăm complexul dat de fig. 62 care corespunde benzii lui Möbius, deoarece se obține dintr-un pătrat identificînd două la-

turi cu sens de parcurs inversat (fig. 62). Avem în acest caz şase triunghiuri pe care le notăm astfel:

$$E_2^1 = A_1A_2A_4, \quad E_2^2 = A_4A_2A_6$$
$$E_2^3 = A_2A_3A_6, \quad E_2^4 = A_3A_6A_5 \qquad (71)$$
$$E_2^5 = A_4A_3A_5, \quad E_2^6 = A_1A_4A_5.$$

De asemenea, vom nota prin x_i simplexele de dimensiune 1, deci segmentele punînd:

$$x_1 = A_1A_2, \quad x_2 = A_2A_4, \quad x_3 = A_1A_4, \quad x_4 = A_2A_3$$
$$x_5 = A_2A_6, \quad x_6 = A_3A_6, \quad x_7 = A_3A_5, \quad x_8 = A_3A_4 \qquad (71')$$
$$x_9 = A_4A_5, \; x_{10} = A_5A_1, \; x_{11} = A_4A_6, \; x_{12} = A_5A_6.$$

Notînd cu z_i frontierele lui x_i, avem:

$$z_1 = A_2 - A_1, \quad z_2 = A_4 - A_2, \quad z_4 = A_3 - A_2, \quad z_5 = A_6 - A_2,$$
$$z_7 = A_5 - A_3, \ldots$$

obţinem deci:

$$A_1 = A_2 - z_1, \; A_4 = A_2 + z_2, \; A_3 = A_2 + z_4, \; A_6 = A_2 + z_5,$$

ceea ce ne spune că rangul ρ_1 al matricei ${}_{(1)}\eta$ este egal cu 5.

Acestea fiind spuse, să notăm cu y_i frontierele lui E_2^i. Avem deci, ţinînd seama de formulele (71) şi (71′),

$$y_1 = x_2 - x_3 + x_1, \qquad y_2 = -x_{11} + x_5 - x_2,$$
$$y_3 = x_6 - x_5 + x_4, \qquad y_4 = -x_{12} - x_7 + x_6,$$
$$y_5 = -x_9 + x_7 - x_8, \qquad y_6 = x_3 + x_9 + x_{10}.$$

Să arătăm că y_i sînt liniar independente. Într-adevăr, dacă am avea o relaţie de forma:

$$a_1y_1 + \ldots + a_6y_6 = 0,$$

ţinînd seama că x_2 figurează numai în y_1 şi în y_2 cu semne contrare, trebuie să avem $a_1 = a_2$. De asemenea, din cauza lui x_3 trebuie să avem $a_2 = a_3$; din cauza lui $x_7, a_4 = a_5$; din cauza lui x_3, $a_1 = a_3$; din cauza lui x_9, $a_5 = a_6$. Deci coeficienţii a_i trebuie să fie egali între ei; dar avem:

$$y_1 + \ldots + y_6 = x_1 + x_4 - x_8 + x_{10} + 2x_6 - x_{11} - x_{12}.$$

Lanţurile y_i sînt deci independente şi avem $\rho_2 = 6$. Avem deci:

$$\alpha_2 = 6, \; \alpha_1 = 12, \; \alpha_0 = 6.$$

Dacă scriem numerele lui Betti pentru banda lui Möbius, obţinem:

$$R_2 = 0, \; R_1 = R_0 = 1. \qquad (72)$$

În mod analog se pot obţine numerele lui Betti pentru tor, luînd ca triangulaţie, triangulaţia dată în fig. 63 care conţine 12 puncte P_i ($i = 1, \ldots, 12$). În acest caz avem:

$$\alpha_2 = 24, \; \alpha_1 = 36, \; \alpha_0 = 12,$$

deoarece sînt 24 de triunghiuri şi 36 de laturi diferite.

Avem, de exemplu, ca laturi:

$$P_1P_2 \quad P_1P_3 \quad P_1P_6, \quad P_1P_7 \quad P_1P_8, \quad P_1P_9, \quad P_1P_{10}$$
$$P_1P_{11}, \quad P_2P_4, \quad P_2P_5 \quad P_2P_7, \quad P_2P_8, \quad P_2P_{11}$$
$$P_3P_4, \quad P_3P_5, \quad P_3P_6, \quad P_3P_4, \quad P_3P_{11}, \quad P_4P_6$$
$$P_4P_7 \quad P_4P_8, \quad P_4P_9, \quad P_4P_{11}, \quad P_4P_{12}, \quad P_5P_6$$
$$P_5P_7, \quad P_5P_8, \quad P_5P_9, \quad P_5P_{10}, \quad P_5P_{11}, \quad P_6P_7$$
$$P_6P_{10}, \quad P_7P_{12}, \quad P_8P_9, \quad P_8P_{10}, \quad P_9P_{12}.$$

Rezultă că avem:

$$R_2 - R_1 + R_0 = \alpha_2 - \alpha_1 + \alpha_0 = 0,$$

deci caracteristica lui Euler este nulă. Cum pe de altă parte avem $R_2 = R_0 = 1$, deoarece torul este conex şi orientabil, rezultă că $R_1 = 2$, deci avem toate numerele lui Betti ale torului.

Este de remarcat că triangularea torului dată prin fig. 63 conţine 72 de simplexe de diferite dimensiuni, căci avem:

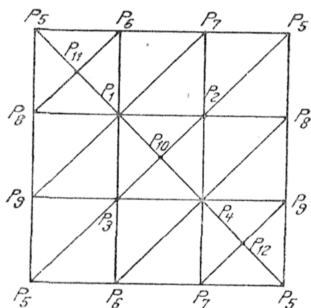
$$\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0 = 72.$$

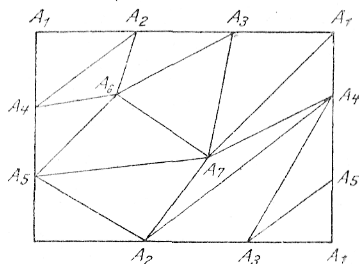
Se poate arăta că triangularea cea mai simplă a torului conţine 42 de simplexe[1], dar această triangulare este mai puţin simetrică decît aceea dată de fig.63. Avem o realizare a acestei triangulări în fig.64 datorită lui T. Hangan.

---

[1] Steenrod, *Topology of Fibre Bundles*, Princeton University, Press, 1951, p. 156.

Realizarea naturală a unui complex. Vom încheia acest paragraf arătînd că orice complex format din n vîrfuri poate fi realizat în spaţiul euclidian E_n cu n dimensiuni. În adevăr, să presupunem că avem un complex K cu n vîrfuri. Putem să presupunem că aceste vîrfuri sînt punctele unitare $A_1, \ldots, A_n$ ale axelor de coordonate în E_n. În


Fig. 63


Fig. 64

acest caz, matricea (54) a coordonatelor punctelor $A_1, \ldots, A_n$ este dată de tabloul:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ldots\ldots & 0 & 1 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ 0 & & \ldots\ldots & 1 & 1 \end{vmatrix} \tag{73}$$

şi coordonatele baricentrice $\lambda^1, \ldots, \lambda^n$ ale unui punct din simplexul $A_1, \ldots, A_n$ coincid cu coordonatele carteziene ortogonale $x^1, \ldots, x^n$ din spaţiul E_n ale aceluiaşi punct. Avem deci:

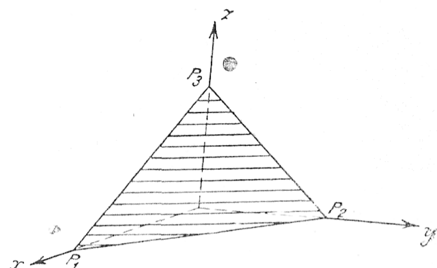
$$x^1 + \ldots + x^n = 1. \tag{74}$$

Dacă vîrfurile lui K sînt punctele $A_1, \ldots, A_n$, simplexele lui K vor fi şi feţe ale simplexului $A_1 \ldots A_n$, deci complexul K este realizat în hiperplanul (74) care-l putem numi hiperplanul unitar al spaţiului E_n. În adevăr, fiecărei feţe din complexul K, formată din punctele $S_{i_1} \ldots S_{i_r}$ $(r \leqslant n)$ îi putem face să corespundă faţa formată din punctele unitare pe axele lui E_n corespunzătoare lui $S_{i_1}, \ldots, S_{i_r}$.

Fiind date două puncte $P(\lambda^1, \ldots, \lambda^n)$ şi $Q(\mu^1, \ldots, \mu^n)$ ale complexului K, unde λ, μ sînt coordonate baricentrice, deci două puncte $P(x^1, \ldots, x^n)$, $Q(y^1, \ldots, y^n)$, unde $x^i = \lambda^i$, $y^i = \mu^i$ ale spaţiului E_n, distanţa PQ între aceste puncte este dată de formula lui Pitagora:

$$\overline{PQ} = \sqrt{(y^1 - x^1)^2 + \ldots + (y^n - x^n)^2}, \tag{75}$$

care se zice că constituie de asemenea distanţa punctelor $\overline{PQ}$ din complex şi această distanţă este dată de aceeaşi formulă în coordonate baricentrice. Realizarea complexului K astfel obţinută se zice că constituie realizarea naturală şi (75) este metrica naturală a complexului K.


Fig. 65

Să considerăm cazul complexului K format de un triunghi $P_1P_2P_3$ (fig. 65). Considerînd punctele P_1, P_2, P_3 în spaţiu drept punctele unitare ale unui sistem de axe ortogonale $O(x, y, z)$, complexul K este format din triunghiul $P_1P_2P_3$ situat în planul

$$x + y + z = 1,$$

unde x, y, z sînt cantităţi pozitive sau nule (fig. 65).

Să considerăm de asemenea complexul format din feţele unui tetraedru; acest complex fiind format din 4 vîrfuri, realizarea lui naturală are loc într-un spaţiu euclidian cu patru dimensiuni. Fie x^1, x^2, x^3, x^4 coordonate ortogonale în spaţiul E_4. Avem atunci pentru punctele $P(x^1, x^2, x^3, x^4)$ din K, $x^1 + x^2 + x^3 + x^4 = 1$, unde cantităţile x^1, x^2, x^3, x^4 sînt numere pozitive.

Dacă presupunem că P_1, P_2, P_3, P_4 corespund respectiv punctelor unitare de pe axele x^1, x^2, x^3, x^4, atunci feţele E_2^1, E_2^2, E_2^3, E_2^4 definite de formulele (56) sînt, în această realizare, definite respectiv de ecuaţiile:

$$x^1 + x^2 + x^4 = 1, \quad x^1 + x^3 + x^4 = 1, \quad x^2 + x^3 + x^4 = 1,$$
$$x^1 + x^2 + x^3 = 1$$

sau dacă vrem de ecuaţiile:

$$x^3 = 0, \quad x^2 = 0, \quad x^1 = 0, \quad x^4 = 0.$$

Ecuaţiile laturilor se obţin luînd cîte două din aceste ecuaţii.

Desigur că un complex K dat poate avea și alte realizări decît realizarea naturală, însă orice altă realizare admite o transformare topologică (bicontinuă și biunivocă) în realizarea naturală.

Astfel, dacă ne referim la complexul K, pe care-l putem numi complexul sferic, dat de fețele unui tetraedru, el are o realizare în acest caz în spațiul euclidian cu trei dimensiuni. El are, așa cum am

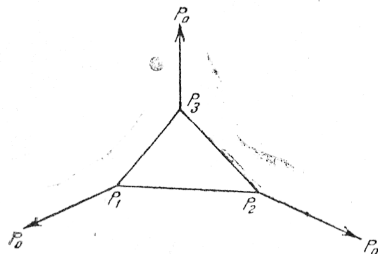


Fig. 66

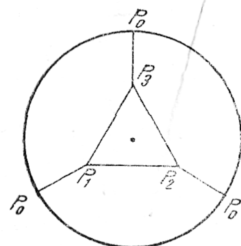


Fig. 67

arătat mai sus, o realizare (realizarea naturală) în spațiul euclidian cu patru dimensiuni. El poate avea o realizare în planul euclidian conform, deci pentru care punctele la infinit sînt considerate ca formînd un singur punct. Dacă P_0 este acest punct și P_1, P_2, P_3 sînt puncte la distanță finită, triunghiurile formate cu $P_0P_1P_2P_3$ (fig. 66) realizează de asemenea complexul K. Am văzut în § 7 că planul conform este topologic echivalent cu sfera, ceea ce explică realizarea dată în fig. 66 complexului sferic. Desigur, putem presupune de asemenea că sfera este dată de un disc, în care periferia contează ca un singur punct, așa cum arată fig. 67.

Scufundarea unui complex H_n în E_{2n+1}. Realizarea naturală a unui complex abstract H pe care am considerat-o mai sus depinde de numărul vîrfurilor complexului. Se poate face o scufundare sau realizare a unui complex de dimensiune n într-un spațiu euclidian E_{2n+1}. În adevăr, fie $i_0, \ldots, i_k$ vîrfurile complexului abstract H_n. Să facem să corespundă acestor vîrfuri $k+1$ puncte în E_{2n+1} în poziție generală, deci în așa fel ca oricare $s+2$ dintre ele unde $s<2n+1$ să nu se găsească în același hiperplan de dimensiune s. Fie atunci două simplexe de dimensiune r și s din H_n la care corespund două simplexe A_r și B_s din E_{2n+1}. Să arătăm că A_r și B_s nu au puncte comune, deci că mulțimea simplexelor A_r din E_{2n+1} formează un complex K_n, care realizează complexul H_n. În adevăr, fie C_t simplexul format din vîrfurile lui A_r și B_s. Cum avem $r \leqslant n$, $s \leqslant n$, deoarece H_n este de dimensiune n, rezultă $t \leqslant 2n+1$, deci C_t este un simplex de dimensiune t din R_{2n+1}, iar A_r și B_s sînt două fețe ale lui. Deci A_r și B_s nu au puncte comune și proprietatea este demonstrată.

Capitolul III

AXIOMATIZARE

În acest capitol vom arăta cum se poate ajunge la o construcție axiomatică a geometriei lui Euclid, evitînd unele deficiențe ce au fost semnalate în capitolele precedente și care apar în construcția dată în *Elementele* lui Euclid.

Vom începe prin a presupune că geometria lui Euclid există, fiind, cel puțin în prima aproximație, geometria spațiului lumii materiale. Prin geometria euclidiană am arătat în primul capitol că se înțelege totalitatea proprietăților conținute în *Elementele* lui Euclid, de exemplu, teorema lui Tales, teorema lui Pitagora, teoremele de congruență ale triunghiurilor etc. Ne punem aici problema de a scoate în evidență numărul minim de propoziții care trebuie luate ca axiome, pentru ca toate celelalte proprietăți ale geometriei euclidiene să devină teoreme, deci să poată fi demonstrate numai cu ajutorul raționamentelor logice. De asemenea, vom căuta să alegem ca axiome propoziții cît mai simple, al căror adevăr să fie recunoscut nu numai de specialiști, ci de orice om care posedă noțiunile fundamentale de punct, dreaptă, plan, sens de parcurs pe o direcție dată și de perpendicularitate. Nu vom presupune cunoscută noțiunea de număr real, deoarece vom ajunge la ea în cursul expunerii și vom defini geometric operațiile cu numere.

Acest punct de vedere, după cum am arătat în primul capitol, a fost introdus în știință de geometrii greci, dintre care cităm pe Eudoxus, Pitagora, Aristotel, Platon, Tales, Teetet, Euclid și Arhimede.

Spre deosebire de ei însă, vom duce construcția geometriei pînă la introducerea sistemelor de coordonate carteziene ortogonale și la noțiunea de distanță, concepută ca număr real. Importanța acestor noțiuni este fundamentală și ele au contribuit la dezvoltarea geometriei prin introducerea unor spații noi și la deschiderea unor capitole noi de geometrie: geometria algebrică, geometria diferențială, topologia diferențială etc.

Geometria creată de vechii greci s-a oprit în fața unor obstacole grave: mărimile cu care lucrau geometrii greci (lungimi, arii, volume etc.) se puteau aduna și se puteau compara, dar nu se puteau înmulți. Două mărimi defineau în teoria lor, care se datorește în special lui Eudoxus, un raport, care era un operator care asocia fiecărei mărimi altă mărime. Rapoartele se puteau înmulți, prin compunerea operatorilor pe care-i reprezentau, dar nu se puteau aduna. În teoria lui

Eudoxus nu exista deci un cîmp unic de mărimi cărora să li se poată aplica operaţiile fundamentale: adunare şi înmulţire. De asemenea, ei n-au reuşit să creeze o teorie generală a numerelor iraţionale.

Un astfel de cîmp, pe care-l numim astăzi *corpul numerelor reale*, a fost creat în secolul al XVI-lea e.n., prin lucrările algebriştilor italieni. Din aceştia menţionăm pe Bombelli, care în *Algebra* sa a făcut primul distincţia între punctele unei drepte şi numere, şi în acelaşi timp a arătat că se poate stabili o corespondenţă biunivocă între punctele unei drepte şi numerele reale. Cu ajutorul acestei corespondenţe el a obţinut o construcţie geometrică a sumei şi produsului a două numere, construcţie ce constituie în acelaşi timp prima definiţie riguroasă a acestor operaţii.

În acelaşi secol, Simon Stevin, matematician olandez, a reluat teoriile lui Bombelli şi a dat scrierea zecimală a numerelor reale, indicînd şi metode de calcul prin aproximaţie. Pe aceste baze, Fermat şi Descartes au creat în secolul al XVII-lea geometria analitică, ca metodă de cercetare a geometriei euclidiene. De la Burrow şi Newton, pînă la Riemann însă, numerele reale erau concepute ca rapoarte de mărimi geometrice, aşa cum gîndeau şi matematicienii greci, pentru care numere abstracte erau numai numerele 2, 3, 4, ...

Pentru a păstra acelaşi punct de vedere, care ni se pare deosebit de interesant, vom introduce ca mărimi translaţiile spaţiului şi ca rapoarte, omotetiile. Compunerea acestor transformări ne va duce la operaţiile de adunare şi înmulţire într-un anumit cîmp, ce va rezulta pînă la urmă identic cu cîmpul numerelor reale.

Expunerea care urmează are avantajul că nu introduce construcţii artificiale, constituind o înlănţuire logică de propoziţii (axiome sau teoreme) simple, care joacă fiecare un rol important în geometrie. Expunerea noastră foloseşte idei ce apar la von Staudt, Hilbert, Veblen şi Young, Artin, Coxeter şi alţii.

§ 1. SPAŢIUL AFIN

Vom considera următoarele proprietăţi ale punctelor, dreptelor şi planelor din spaţiu, numite axiome:

I. Prin două puncte distincte trece o dreaptă şi numai una.

II. Prin trei puncte nesituate pe aceeaşi dreaptă trece un plan şi numai unul singur.

III. Dacă o dreaptă are două puncte comune cu un plan, atunci toate punctele dreptei se află în acel plan.

IV. Dacă două plane au un punct comun, ele mai au cel puţin încă un punct comun.

V. Există trei puncte necoliniare. Orice plan conţine cel puţin un punct.

VI. Există patru puncte nesituate în acelaşi plan.

VII. Orice dreaptă conţine cel puţin două puncte.

VIII. Fiind dată o dreaptă d şi un punct P nesituat pe dreapta d, există în planul dreptei d şi punctului P* o singură dreaptă d', trecînd prin P şi nesecantă (paralelă) cu d.

Orice proprietate a figurilor din spaţiu care se deduce din aceste opt axiome se numeşte *proprietate afină*. Totalitatea proprietăţilor afine constituie *geometria afină*. Spaţiul în care se consideră proprietăţile afine şi numai acestea se numeşte *spaţiul afin* (cu trei dimensiuni).

Vom da exemple de proprietăţi afine.

Teorema 1. *Două drepte distincte au cel mult un punct comun.*

Într-adevăr, din axioma I rezultă că dacă dreptele d şi d' ar avea două puncte comune A, B atunci d, d' ar fi confundate.

Două drepte distincte pot fi deci secante, nesecante coplanare (paralele) sau nesecante şi necoplanare (strîmbe).

Teorema 2. *O dreaptă care nu aparţine unui plan are cel mult un punct comun cu acel plan.*

Într-adevăr, dacă dreapta d ar avea două puncte comune cu planul α, din axioma III ar rezulta că dreapta d ar aparţine planului α.

Teorema 3. *Fiind date două plane distincte α, β, ele sînt sau paralele (n-au nici un punct comun), sau au o dreaptă d comună. În ultimul caz nu există alte puncte comune planelor α, β, în afara punctelor dreptei d.*

Într-adevăr, dacă planele α, β nu sînt paralele, ele au cel puţin un punct comun A. Din axioma IV rezultă că planele α, β mai au un punct comun B, diferit de A. Punctele A, B aparţin, conform axiomei I, unei drepte d. Dreapta d avînd două puncte comune A, B cu fiecare dintre planele α, β din axioma III rezultă că d este situată în fiecare din planele α, β, deci α, β au dreapta comună d.

Să presupunem că planele α, β mai au un punct comun C, nesituat pe dreapta d. Prin urmare, planele α, β au trei puncte comune A, B, C, nesituate pe aceeaşi dreaptă. Atunci axioma II ne spune că planele α, β sînt confundate, contrar ipotezei.

* Din axioma VII rezultă că pe dreapta d există două puncte A, B. Din axioma II rezultă că punctele A, B, P aparţin unui plan unic. Acest plan, care se numeşte *planul punctului P şi al dreptei d*, conţine dreapta d, datorită axiomei III.

T e o r e m a 4. *O dreaptă d, paralelă cu o dreaptă d' dintr-un plan α și nesituată în planul α, este paralelă cu planul α (nu are nici un punct comun cu α).*

Să presupunem că dreapta d nu este paralelă cu planul α. Atunci ea are un punct comun A cu acest plan (fig. 68). Fie B un punct al dreptei d'. Punctul B există, conform axiomei VII.

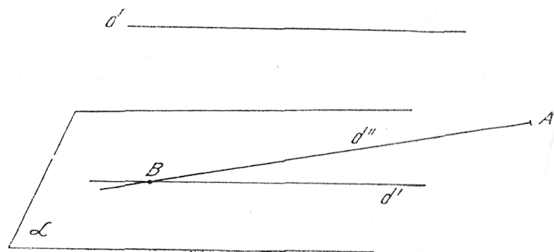


Fig. 68

Prin punctul B putem duce, conform axiomei VIII, o singură dreaptă d'' coplanară cu d și nesecantă cu d, deci paralelă cu d. Fie β planul dreptelor d, d'. Din axioma VIII și din ipoteză rezultă că dreptele d', d'' coincid. Dar dreapta d'' trece prin punctul A, deoarece $d'' = d'$ este dreapta de intersecție a planelor α, β și A aparține fiecăruia din cele două plane. Aceasta contrazice faptul că d' este paralelă cu d. Acestă contrazicere ne spune că nu putem presupune că dreapta d are un punct comun A cu planul α, deci d este paralelă cu acest plan.

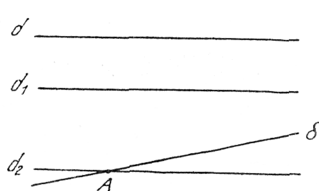


Fig. 69

T e o r e m a 5. *Două drepte paralele cu a treia sînt paralele între ele.*

Într-adevăr, fie dreptele d_1, d_2 paralele cu dreapta d (fig. 69). Fie α planul determinat de dreapta d_1 și de un punct A al dreptei d_2 (vezi nota de la axioma VIII.) Dreptele d, d_2 fiind paralele, ele aparțin unui plan β.

Cazul 1. Planele α, β sînt confundate. Atunci dreptele d_1, d_2 sînt coplanare și nu sînt secante, deoarece dacă d_1, d_2 ar avea un punct comun P, ar rezulta că prin P ar exista două paralele la dreapta d.

Cazul 2. Planele α, β sînt distincte. Cum acestea au un punct cumun A, ele au, conform teoremei 3, o dreaptă comună δ, ce trece prin punctul A. Dreapta δ este paralelă cu dreapta d_1, deoarece este

în același plan α cu d_1 și deoarece este nesecantă cu d_1, fiind în planul β, care este paralel cu d_1, în baza teoremei 4(d_1 este paralelă cu dreapta d din planul β). Deci $\delta \parallel d_1$.

Pe de altă parte, dreapta δ este în același plan β cu d și este nesecantă cu d, deoarece δ este în planul α și d este paralelă cu planul α, fiind paralelă cu dreapta d_1 din planul α. Deci δ este paralelă cu d. Din axioma VIII rezultă că δ coincide cu d_2, care este paralelă prin ipoteză cu d. Din $\delta \parallel d_1$ și $\delta = d_2$ rezultă $d_1 \parallel d_2$.

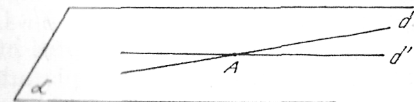


Fig. 70

T e o r e m a 6. *Dacă o dreaptă d este paralelă cu un plan α și dacă A este un punct din planul α, atunci paralela dusă din A la dreapta d este situată în planul α.*

Fie d' paralela dusă din A la dreapta d (fig. 70) și fie β planul dreptelor d, d'. Acest plan are punctul A comun cu α și din axioma IV rezultă că planele α, β au o dreaptă comună d'', trecînd prin A. Dreapta d fiind paralelă cu planul α, d nu poate întîlni dreapta d'', deci $d \parallel d''$. Așadar, prin A avem două paralele d', d'' la dreapta d. Din axioma VIII rezultă că $d' = d''$. Dar d'' este în planul α, deci d' este în planul α.

Să demonstrăm următoarea teoremă:

T e o r e m a 7. *Orice plan α conține cel puțin două drepte concurente.*

Din axioma V rezultă că planul α are cel puțin un punct A, iar din axioma VI rezultă că există patru puncte M, N, P, Q nesituate în același plan. Atunci oricare trei dintre acest patru puncte sînt necoliniare și A nu poate aparține fiecăruia dintre planele MNP, MNQ, NPQ, MPQ. Să presupunem că A este exterior planului $\beta = MNP$. Dacă planul β nu este paralel cu planul α, β intersectează planul α după o dreaptă d, care nu conține punctul A. Din axioma VII rezultă că dreapta d conține cel puțin două puncte B, C. Dreptele AB, AC sînt distincte și situate în planul α, conform axiomei III.

Dacă planul β este paralel cu planul α, dreptele MN, MP sînt paralele cu planul α. Fie d', d'' paralelele duse prin A la MN și MP. Din teorema 6 rezultă că d' și d'' sînt conținute în planul α; d' și d'' sînt distincte, deoarece dacă am avea $d' = d''$, ar rezulta că din M putem duce două paralele MN, MP la aceeași dreaptă d', ceea ce contrazice axioma VIII.

Teorema 8. *Dacă M este un punct exterior planului α, prin M trece un plan paralel cu α şi numai unul.*

Pentru demonstraţie să considerăm un punct oarecare A în planul α şi fie d', d'' două drepte duse prin A în planul α, ceea ce este posibil după teorema 7. Fie δ', δ'' paralelele duse prin M la dreptele d', d''. Dreptele δ', δ'' fiind concurente, aparţin unui plan β; δ' şi δ'' sînt distincte, deoarece altfel d', d'' ar fi două paralele duse prin A la aceeaşi dreaptă $\delta' = \delta''$. Deci δ', δ'' aparţin unui singur plan.

Să arătăm că planul β este paralel cu planul α. Dacă β n-ar fi paralel cu α, β şi α ar avea o dreaptă comună l. Dreapta l ar intersecta cel puţin una din dreptele d', d''. Dar dacă l ar intersecta de exemplu dreapta d', am contrazice faptul că d' este paralelă cu planul β, fiind paralelă cu dreapta δ' din planul β. Deci într-adevăr avem $\beta \parallel \alpha$.

Să presupunem acum că prin punctul M putem duce două plane β, β', paralele cu planul α. Aceste plane se vor intersecta după o dreaptă r, conţinînd punctul M. Fie N un punct al dreptei r, diferit de M (axioma VII). Fie B, C două puncte pe dreptele d', respectiv d'', diferite de A. Punctele N, B, C sînt necoliniare (N nu poate aparţine planului α, deci nici dreptei BC) şi determină, prin urmare, un plan γ. Planul γ intersectează planele β, β', α după trei drepte s, s', t, astfel încît s, s' au punctul comun N şi sînt paralele cu t. Într-adevăr, pentru a arăta de exemplu că s este paralelă cu t, observăm că s, l sînt în acelaşi plan γ şi nu se întîlnesc, fiind situate în planele paralele β, α. Am ajuns astfel la concluzia că prin acelaşi punct N am putea duce două paralele s, s' la aceeaşi dreaptă t, ceea ce contrazice axioma VIII. Deci $\beta = \beta'$.

Din demonstraţia precedentă rezultă şi

Teorema 9. *Paralelele duse dintr-un punct M exterior la un plan α aparţin unui plan β, care este planul paralel dus prin M la α.*

Teorema 10. *Două plane paralele α_1, α_2 sînt tăiate de un plan neparalel cu α_1 după două drepte paralele.*

Într-adevăr, fie α_1, α_2 două plane paralele şi β un plan care intersectează planul α_1 după o dreaptă d_1. Planul β nu poate fi paralel cu planul α_2, deoarece în caz contrar, prin orice punct al dreptei d_1 am avea două plane paralele: α_1 şi β, la planul α_2. Deci β intersectează planul α_2 după o dreaptă d_2. Dreptele d_1, d_2 sînt în acelaşi plan β şi nu se întîlnesc, fiind situate în planele α_1, α_2. Deci $d_1 \parallel d_2$.

Teorema 11. (*Teorema specială a lui Desargues*). *Dacă triunghiurile ABC, A'B'C' au laturile paralele*

$$AB \parallel A'B',\ AC \parallel A'C'$$

şi dacă dreptele AA', BB', CC' sînt concurente sau paralele, atunci laturile BC, B'C' sînt paralele.

Cazul 1. Planele $\alpha = ABC$, $\alpha' = A'B'C'$ sînt distincte (fig. 71). Dreptele AB, AC fiind paralele cu dreptele $A'B'$, $A'C'$, din teorema 9, rezultă că planul $\alpha = ABC$ este paralel cu planul $\alpha' = A'B'C'$. Din teorema 10, aplicată planului $\beta = OBC$ şi planelor paralele α, α', rezultă $BC \parallel B'C'$.

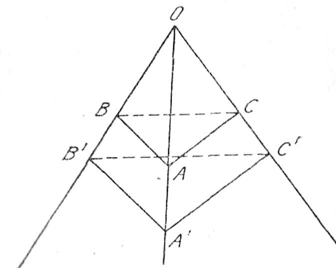


Fig. 71

Cazul 2. $\alpha = \alpha'$ şi dreptele AA', BB', CC' sînt concurente într-un punct O. Din axioma VIII rezultă că nu toate punctele spaţiului se găsesc în planul α. Deci există un punct S exterior planului (fig. 72) α. Punctele O, S determină o dreaptă d. Fie l, m, n paralelele duse din A', B', C' la dreapta d. Dreptele SA, l fiind în planul dreptelor d, OA, sînt paralele sau secante. Ele nu pot fi paralele, deoarece prin S nu se pot duce două paralele d, SA la aceeaşi dreaptă l. Deci SA şi l au un punct comun A''. La fel putem considera intersecţiile B'', C'' ale dreptelor SB, m respectiv SC, n. Dreptele AB, $A''B''$ sînt paralele sau secante, fiind în planul SAB. Dar AB nu poate întîlni dreapta $A''B''$, deoarece AB este paralelă cu dreapta $A'B'$ din planul dreptelor l, m, în care se găseşte şi $A''B''$; deci AB este paralelă cu $A''B''$:

$$AB \parallel A''B''. \quad (1)$$

La fel se arată că avem:

$$AC \parallel A''C''. \quad (2)$$

Din teorema 9 rezultă că planul $A''B''C''$ este paralel cu planul α şi deci avem:

$$BC \parallel B''C''. \quad (3)$$

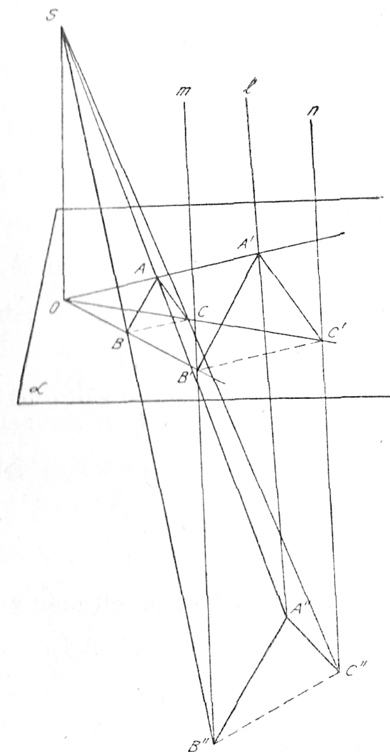


Fig. 72

De altfel, triunghiurile ABC, $A''B''C''$ se găsesc în cazul 1 studiat mai sus. În același caz se încadrează triunghiurile $A'B'C'$, $A''B''C''$, deoarece $\alpha \parallel \alpha''$. Rezultă:

$$B'C' \parallel B''C''. \tag{4}$$

Din (3), (4) și din teorema 5 rezultă că avem $BC \parallel B'C'$.

Cazul 3. $\alpha = \alpha'$ și dreptele AA', BB', CC' sînt paralele. În acest caz, considerăm o dreaptă d, paralelă cu AA', BB', CC' dar nesituată în planul acestor drepte și alegem două puncte S, S' pe d; dacă perechile de drepte coplanare $(SB, S'B')$, $(SC, S'C')$, dau două puncte de intersecție B'', C'' se arată ca mai sus ca $BC \parallel B''C''$, $B'C' \parallel B''C''$ deci $BC \parallel B'C'$. Dacă $SB \parallel S'B'$, triunghiurile ABS, $A'B'S'$ se găsesc în cazul 1 și rezultă $SA \parallel S'A'$. La fel considerînd triunghiurile SAC, $S'A'C'$, deducem $SC \parallel S'C'$ și în sfîrșit, considerînd triunghiurile SBC, $S'B'C'$, deducem $BC \parallel B'C'$.

§ 2. VECTORI ȘI TRANSLAȚII ÎN SPAȚIUL AFIN

Se numește *vector*[1] în spațiul afin orice pereche ordonată de puncte din spațiu. Vectorul format din perechea A, B se notează $\overrightarrow{AB}$. Vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, sînt distincți prin definiție. Dacă $A \neq B$, dreapta AB se numește *suportul* vectorului $\overrightarrow{AB}$. Dacă $A = B$ se spune că vectorul $\overrightarrow{AB}$ este *nul*. În general, A este *originea* vectorului $\overrightarrow{AB}$, iar B este *capătul* vectorului $\overrightarrow{AB}$.

Doi vectori se spun *coliniari* dacă suporții lor coincid și *coplanari*, dacă suporții lor sînt în același plan.

Fie $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ doi vectori necoliniari; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ se numesc *echipolenți* și se notează $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, dacă dreptele AC, BD sînt paralele și dacă suporții lor AB, CD sînt de asemenea paraleli. Dacă $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ sînt doi vectori coliniari, ei se numesc echipolenți, dacă există un vector $\overrightarrow{EF}$, necoliniar cu $\overrightarrow{AB}$ (deci nici cu $\overrightarrow{CD}$) echipolent cu fiecare dintre vectorii, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$. Vom scrie și în acest caz: $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$.

[1] Vectorul definit aici se întîlnește uneori în literatura matematică sub denumirea de *vector legat*.

Să demonstrăm că echipolența vectorilor este o relație de echivalență, deci are proprietățile:

1° (reflexivitate). Orice vector este echipolent cu el însuși:

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}.$$

2° (simetrie). Dacă $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, atunci $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$.

3° (transitivitate). Dacă $\overrightarrow{AB}$ este echipolent cu $\overrightarrow{CD}$ și dacă $\overrightarrow{CD}$ este echipolent cu $\overrightarrow{EF}$, atunci $\overrightarrow{AB}$ este echipolent cu $\overrightarrow{EF}$.

Reflexivitatea rezultă din definiția echipolenței a doi vectori coliniari. Într-adevăr, fie E un punct exterior dreptei AB (fig. 73). Prin E să ducem paralela l la AB, iar prin B paralela l' la AE. Dreptele l, l' sînt în planul definit de dreptele concurente AB, AE și nu sînt

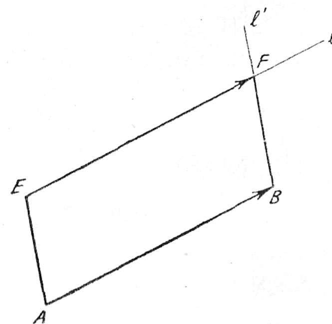


Fig. 73

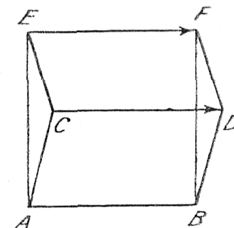


Fig. 74

paralele, deoarece dacă $l' \parallel l$, ar rezulta că prin B putem duce două paralele BA, l' la aceeași dreaptă l. Deci, l, l', au un punct comun F. Vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EF}$ sînt necoliniari și echipolenți. Din

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF},\ \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$$

rezultă $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$.

Simetria rezultă din faptul că definiția însăși a echipolenței vectorilor $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ nu se schimbă dacă schimbăm $\overrightarrow{AB}$ cu $\overrightarrow{CD}$.

Pentru a demonstra transitivitatea, considerăm:

Cazul 1, cînd vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ sînt pe trei drepte distincte (fig. 74) Din $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF}$ rezultă:

$$AB \parallel CD, \qquad CD \parallel EF, \tag{5}$$

$$AC \parallel BD, \qquad CE \parallel DF. \tag{6}$$

Din (5) rezultă:

$$AB \parallel EF. \tag{7}$$

Din teorema specială a lui Desargues, aplicată triunghiurilor ACE, BDF rezultă:

$$AE \parallel BF. \tag{8}$$

Din relațiile (7), (8) rezultă $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$.

Cazul 2. Fie acuma $\overrightarrow{CD}$ coliniar cu $\overrightarrow{AB}$ și necoliniar cu $\overrightarrow{EF}$ (fig. 75).

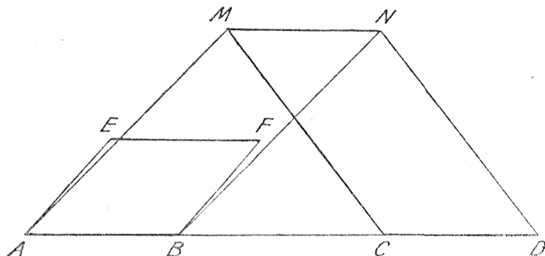


Fig. 75

Atunci există, dacă $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, un vector $\overrightarrow{MN}$, necoliniar cu $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ și echipolent cu $\overrightarrow{AB}$ și cu $\overrightarrow{CD}$. Dacă $\overrightarrow{MN}$ nu este coliniar cu $\overrightarrow{EF}$, din relațiile

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{MN}, \ \overrightarrow{MN} \sim \overrightarrow{CD}, \ \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF}$$

și din transitivitatea echipolenței vectorilor necoliniari deducem $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$. Dacă $\overrightarrow{MN}$ este coliniar cu $\overrightarrow{EF}$, alegem un punct P în afara

planului dreptelor AB, EF și construim vectorul $\overrightarrow{PQ}$, echipolent cu $\overrightarrow{MN}$, așa cum s-a procedat în fig. 68. Din relațiile

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{MN}, \ \overrightarrow{MN} \sim \overrightarrow{PQ},$$

$$(\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{MN}, \ \overrightarrow{MN} \sim \overrightarrow{CD}), \ \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF}$$

rezultă $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{PQ}$, $(\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF})$ și mai departe, $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{EF}$ și în sfîrșit $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$.

Cazul 3, cînd $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ sînt pe aceeași dreaptă d. Din $\overrightarrow{EF} \sim \overrightarrow{CD}$ rezultă că există un vector $\overrightarrow{MN}$, nesituat pe d, astfel ca:

$$\overrightarrow{EF} \sim \overrightarrow{MN}, \ \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{MN}. \tag{9}$$

Vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{MN}$ se încadrează în cazul 2 și rezultă $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{MN}$. Din această relație și din prima relație (9) rezultă $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$.

Cazul 4, cînd $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ sînt coliniari, este simetric cu *cazul 2*.

Cazul 5, cînd $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EF}$ sînt coliniari și $\overrightarrow{CD}$ necoliniar cu ei, rezultă din definiția echipolenței a doi vectori coliniari că $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$.[1]

Din raționamentele precedente reținem următoarea teoremă, demonstrată o dată cu reflexivitatea echipolenței.

T e o r e m a 12. *Orice punct E din spațiu este originea unui vector unic, echipolent cu un vector dat arbitrar* $\overrightarrow{AB}$.

Fie $\overrightarrow{AB}$ un vector oarecare. Transformarea care asociază fiecărui punct P din spațiu capătul Q al vectorului $\overrightarrow{PQ}$ echipolent cu $\overrightarrow{AB}$ se numește *translația* definită de vectorul $\overrightarrow{AB}$ și se notează cu $T_{\overrightarrow{AB}}$

[1] Teorema demonstrată arată că mulțimea vectorilor dintr-un spațiu afin poate fi descompusă în *clase*, astfel încît două clase distincte să nu aibă nici un vector comun. Anume vom asocia fiecărui vector $\vec{u}$ mulțimea vectorilor echipolenți cu $\vec{u}$, pe care o vom numi *clasa* lui $\vec{u}$ și o vom nota $\{\vec{u}\}$. Avem $\vec{u} \in \{\vec{u}\}$ și $\vec{v} \in \{\vec{u}\}$ dacă și numai dacă $\vec{v} \sim \vec{u}$. Clasele $\{\vec{u}\}$ se numesc *vectori liberi*.

sau T^A_B. Transformatorul punctului P prin translaţie se notează $T_{\overrightarrow{AB}}(P)$ sau $T^A_B(P)$; deci $Q = T^A_B(P) = T_{\overrightarrow{AB}}(P)$ este o relaţie echivalentă cu $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{PQ}$.

Teorema 13. *Doi vectori echipolenţi definesc aceeaşi translaţie, deci din $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ rezultă $T^A_B = T^C_D$.*

Fie P un punct oarecare în spaţiu. Trebuie să arătăm că $T^A_B(P) = T^C_D(P)$. Fie $Q = T^A_B(P)$. Atunci avem $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{AB}$. Cum $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, rezultă, aplicînd tranzitivitatea, $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{CD}$, deci $Q = T^C_D(P)$.

Dacă vectorul $\overrightarrow{AB}$ este nul, punem $T^A_B(P) = P$ pentru orice punct P din spaţiu. Dacă $\overrightarrow{AB}$ nu este nul, deci dacă $A \neq B$, avem evident $T^A_B(P) \neq P$, oricare ar fi punctul P.

Fiind date trei puncte A, B, C oarecare, vom considera operaţia care asociază vectorilor $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ vectorul $\overrightarrow{AC}$ şi vom nota:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

Vectorul $\overrightarrow{AC}$ se va numi *suma* vectorilor $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$. Deci doi vectori

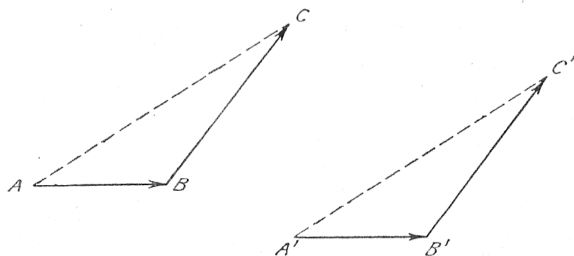


Fig. 76

se pot aduna numai dacă originea unuia coincide cu capătul celuilalt

Teorema 14. *Din relaţiile $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{BC} \sim \overrightarrow{B'C'}$ rezultă*

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \sim \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'}. \tag{10}$$

Într-adevăr trebuie să arătăm că avem $\overrightarrow{AC} \sim \overrightarrow{A'C'}$. Dacă punctele A, B, C nu sînt coliniare, (fig. 76) observînd că avem $AA' \parallel$

$\parallel BB' \parallel CC'$ şi aplicînd teorema specială a lui Desargues, rezultă $AC \parallel A'C'$. Combinînd cu $AA' \parallel CC'$, rezultă $\overrightarrow{AC} \sim \overrightarrow{A'C'}$.

Dacă A, B, C sînt coliniare, A', B', C' sînt de asemenea coliniare.

Din $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{BC} \sim \overrightarrow{B'C'}$ rezultă $AA' \parallel BB'$, $BB' \parallel CC'$, deci avem $AA' \parallel CC'$. Cum şi $AC \parallel A'C'$, deducem $\overrightarrow{AC} \sim \overrightarrow{A'C'}$.[1]

Fie T_1, T_2 două transformări oarecare ale spaţiului în el însuşi. Asociind fiecărui punct P din spaţiu transformatul prin T_1 al punctului $T_2(P)$, se obţine o nouă transformare, care se notează T_1T_2 şi se numeşte *produsul* transformărilor T_1, T_2. Avem deci:

$$(T_1T_2)(P) = T_1(T_2(P)).$$

Fiind dată o translaţie T^A_B şi o a doua translaţie T^E_F, luînd $\overrightarrow{BC} \sim \overrightarrow{EF}$, avem $T^E_F = T^B_C$.

Teorema 15. *Avem, oricare ar fi punctele A, B, C,*

$$T^E_F T^A_B = T^B_C T^A_B = T^A_C, \tag{12}$$

deci produsul a două translaţii este o translaţie, şi anume dacă factorii sînt translaţiile definite de vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, produsul este definit de suma lor $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Fie P un punct oarecare în spaţiu şi

$$Q = T^A_B(P), \quad R = T^B_C(Q).$$

Atunci avem (fig. 77)

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{PQ}, \quad \overrightarrow{BC} \sim \overrightarrow{QR}$$

şi din teorema precedentă rezultă $\overrightarrow{AC} \sim \overrightarrow{PR}$ şi avem prin urmare $R = T^A_C(P)$. Deci:

$$T^A_C = T^B_C T^A_B.$$

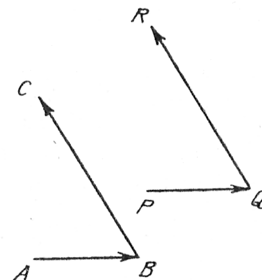


Fig. 77

[1] Această teoremă arată că se poate introduce o lege de compunere în mulţimea vectorilor liberi dintr-un spaţiu afin, punînd $\{\overrightarrow{AB}\} + \{\overrightarrow{BC}\} = \{\overrightarrow{AC}\}$. Această operaţie are proprietăţile adunării numerelor şi anume comutativitate, asociativitate, existenţa elementului neutru (clasa vectorilor nuli) şi existenţa elementului opus unui element $\{\overrightarrow{AB}\}$ (clasa $\{\overrightarrow{BA}\}$). Se spune că vectorii liberi din spaţiul afin formează un *grup abelian*.

Teorema 16. *Produsul a două translații este comutativ:*

$$T_1T_2 = T_2T_1. \tag{12'}$$

Fie P un punct oarecare, și să notăm $Q = T_1(P)$, $R = T_2(Q)$ (fig. 78). Atunci avem $T_1 = T_Q^P$, $T_2 = T_R^Q$, $T_2T_1 = T_R^P$. Dacă $S = T_2(P)$, avem $\overrightarrow{PS} \sim \overrightarrow{QR}$, deci $PS \| QR$, $PQ \| SR$ și presupunînd punctele P, Q, R necoliniare, rezultă $\overrightarrow{SR} \sim \overrightarrow{PQ}$, deci $R = T_Q^P(S)$ sau $R = T_1(S) = T_1(T_2(P)) = (T_1T_2)(P)$; dar de la început $R = T_2(T_1(P)) = (T_2T_1)(P)$, deci am arătat că avem (12'), dacă T_1, T_2 nu sînt paralele.

Fig. 78

Demonstrația comutativității produsului a două translații, în cazul în care translațiile sînt definite de vectori paraleli sau coliniari, se poate da în modul următor.

Fie $u = \overrightarrow{AB}$, $v = \overrightarrow{CD}$ doi vectori paraleli sau coliniari. Trebuie să arătăm că $T_uT_v = T_vT_u$. Fie $w = \overrightarrow{EF}$ un vector necoliniar și neparalel cu u și v și fie $w' = \overrightarrow{FE}$. Avem $T_wT_{w'}$ = identitatea.

Să observăm acuma că produsul a trei transformări T_1, T_2, T_3 oarecare ale spațiului este asociativ, deci avem:

$$(T_1T_2)T_3 = T_1(T_2T_3). \tag{13}$$

Într-adevăr, fie P un punct oarecare al spațiului, apoi $P' = T_3(P)$, $P'' = T_2(P') = (T_2T_3)(P)$, $P''' = T_1(P'') = (T_1(T_2T_3))(P)$. Avem $((T_1T_2)T_3)(P) = (T_1T_2)(T_3(P)) = (T_1T_2)(P') = T_1(T_2(P')) = T_1(P'') = P''' = (T_1(T_2T_3))(P)$, ceea ce demonstrează relația (13). Aplicînd această relație, putem scrie:

$$T_uT_v = (T_uT_v)(T_wT_{w'}) = ((T_uT_v)T_w)T_{w'} = T_u(T_vT_w)T_{w'}.$$

Dar vectorii v, w fiind neparaleli, avem $T_vT_w = T_wT_v$ și putem scrie mai departe:

$$T_uT_v = T_u(T_wT_v)T_{w'}.$$

De asemenea, translația T_wT_v e dată de un vector neparalel cu T_u, deci $T_u(T_wT_v) = (T_wT_v)T_u$ și atunci putem scrie mai departe:

$$T_uT_v = (T_wT_v)T_uT_{w'} = (T_vT_w)T_uT_{w'} = T_v(T_wT_u)T_{w'} =$$
$$= (T_v(T_uT_w))T_{w'} = ((T_vT_u)T_w)T_{w'} = (T_vT_u)(T_wT_{w'}) = T_vT_u.$$

Teorema 17. *Dacă T este o translație și dacă punctul P descrie o dreaptă, respectiv un plan, atunci $T(P)$ descrie o dreaptă respectiv un plan.*

Fie $T = T_B^A$ și P_1, P_2, P trei puncte pe dreapta d (fig. 79). Punînd $Q_1 = T(P_1)$, $Q_2 = T(P_2)$, $Q = T(P)$, avem $\overrightarrow{P_1Q_1} \sim \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{P_2Q_2} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{AB}$ și atunci $Q_1Q_2 \| d$, $Q_1Q \| d$.

Din axioma VIII rezultă că punctele Q_1, Q_2, Q sînt coliniare. Deci oricare ar fi P pe dreapta d, punctul $Q = T(P)$ se află pe dreapta Q_1Q_2.

Fie P_1, P_2, P_3 trei puncte necoliniare (fig. 80), într-un plan α, P un punct oarecare al planului α și $Q_1 = T(P_1)$, $Q_2 = T(P_2)$, $Q_3 = T(P_3)$,

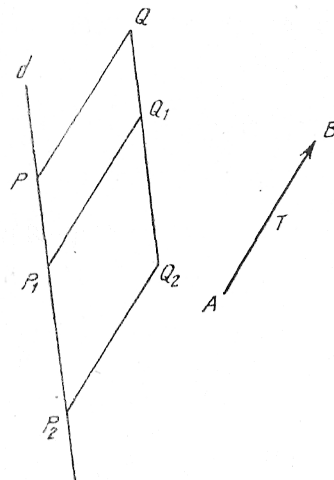


Fig. 79

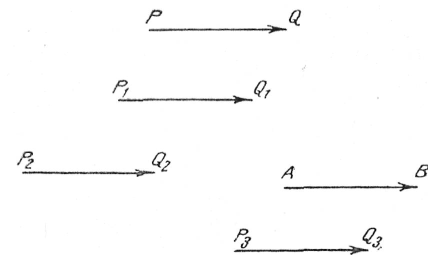


Fig. 80

$Q = T(P)$. Atunci avem $\overrightarrow{P_1Q_1} \sim \overrightarrow{P_2Q_2} \sim \overrightarrow{P_3Q_3} \sim \overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{AB}$. Punctele Q_1, Q_2, Q_3 nu sînt coliniare, deci determină un plan β. Dacă P se află pe una dintre dreptele P_1P_2, P_1P_3, transformatul său Q se află pe dreapta Q_1Q_2 sau Q_1Q_3, deci Q se află în planul β. În general, din relațiile $\overrightarrow{P_iQ_i} \sim \overrightarrow{PQ}$ $(i = 1, 2, 3)$ rezultă $\overrightarrow{PP_i} \| \overrightarrow{QQ_i}$. Deci dreptele QQ_1, QQ_2, QQ_3 sînt paralele cu planul α, care conține dreptele PP_1, PP_2, PP_3, deci QQ_1, QQ_2, QQ_3 sînt în același plan, anume în planul paralel prin Q la α. Deci $Q = T(P)$ se găsește în planul $\beta = Q_1Q_2Q_3$, oricare ar fi P în planul α.

Teorema. 18. *Orice translație transformă o dreaptă d într-o dreaptă paralelă cu d sau confundată cu d.*

Într-adevăr, în fig. 79 avem $Q_1Q \| d$.

O transformare a spaţiului afin, care transformă dreptele în drepte şi puncte distincte în puncte distincte şi pentru care orice punct al spaţiului este transformatul unui punct[1] se numeşte *automorfism* al spaţiului afin.

T e o r e m a 19. *Translaţiile sînt automorfisme ale spaţiului afin.*

Într-adevăr, prima condiţie rezultă din teorema 7, iar a doua este evidentă: din $T(P) = T(Q) = R$ rezultă $\overrightarrow{PR} \sim \overrightarrow{QR}$; vectorii $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{QR}$ n-au suporţi diferiţi, deoarece dacă $PR \neq QR$, am avea $PR \| QR$. Deci vectorii $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{QR}$ sînt coliniari. Fiind echipolenţi, există un vector $\overrightarrow{AB}$, necoliniar cu $\overrightarrow{PR}$ şi $\overrightarrow{QR}$, astfel ca $AP \| BR$, $\overrightarrow{AQ} \| \overrightarrow{BR}$ şi rezultă din axioma VIII că dreptele AP, AQ coincid cu o aceeaşi dreaptă d. Dreapta d taie dreapta PQR într-un singur punct, deci $P = Q$.

Mai putem demonstra că $P = Q$ în modul următor: presupunînd translaţia T definită de vectorul $\overleftrightarrow{AB}$, deci $T = T^A_B$ şi notînd $T' = T^B_A$, avem pentru orice punct P din spaţiu:

$$(T'T)(P) = T^B_A(T^A_B(P)) = T^A_A(P) = P.$$

Dacă $T^A_B(P) = T^A_B(Q) = R$, rezultă:

$$P = (T'T)(P) = T'(T(P)) = T'(R),$$

$$Q = (T'T)(Q) = T'(T(Q)) = T'(R),$$

deci $P = Q$.

§ 3. OMOTETIILE SPAŢIULUI AFIN

Am văzut mai sus că translaţiile sînt automorfisme ale spaţiului afin, care duc drepte în drepte paralele, deci dacă d este o dreaptă şi T o translaţie, avem:

$$T(d) \| d \text{ sau } T(d) = d. \tag{14}$$

Mai putem da un exemplu de transformare a spaţiului afin cu proprietatea (14), anume *omotetia*. Pentru a defini omotetia, să considerăm trei puncte coliniare O, P, P' (fig. 81), cu $P \neq O$, $P' \neq O$. Aceste puncte definesc o transformare H în modul următor. Dacă M este un punct exterior dreptei OPP', definim $H(M)$ ca intersecţia dreptei OM cu paralela dusă din P' la dreapta MP. Dacă N este un punct al dreptei OPP', alegem un punct M exterior acestei drepte, construim $M' = H(M)$ în modul indicat şi definim $N' = H(N)$ ca intersecţia dreptei OP cu paralela dusă din M' la dreapta MN.

Punctul N' nu depinde de alegerea punctului M. Într-adevăr, fie M_1 un punct exterior dreptei OP, diferit de M. Putem presupune că O, M, M_1 nu sînt coliniare. Fie $M_1' = H(M_1)$. Trebuie să arătăm că dreapta $M_1'N'$ este paralelă cu M_1N. Din teorema lui Desargues aplicată triunghiurilor PMM_1, $P'M'M_1'$, ţinînd seama că

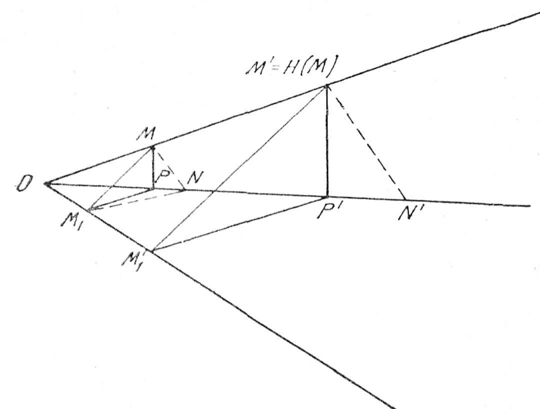


Fig. 81

$$PM \| P'M', \qquad PM_1 \| P'M_1,$$

rezultă relaţia $MM_1 \| M'M_1'$. Dar $MN \| M'N'$, astfel încît aplicînd din nou teorema lui Desargues de data aceasta triunghiurilor MM_1N, $M'M_1'N'$, rezultă $M_1N \| M_1N'$.

Transformarea H, definită mai sus, se va numi *omotetia de centru O cu punctele omologe*, P, P'. Din construcţia lui H rezultă că pentru orice punct M din spaţiu, punctele O, M, $M' = H(M)$ definesc aceeaşi omotetie ca O, P, P'.

Vom conveni să considerăm $H(O) = O$; avem evident $H(P) = P'$.

Să observăm de asemenea că în cazul în care $P' = P$, omotetia H este transformarea identică.

T e o r e m a 20. *Omotetiile sînt automorfisme ale spaţiului afin care transformă o dreaptă într-o dreaptă paralelă sau confundată cu d, deci avem:*

$$H(d) \| d \text{ sau } H(d) = d.$$

[1] O transformare care verifică ultimele două condiţii, deci pentru care orice punct al spaţiului este imaginea unui punct şi a unuia singur, se numeşte *biunivocă*.

Într-adevăr, dacă dreapta d trece prin centrul omotetiei O, avem $H(d) = d$. Presupunînd că d nu conține punctul O (fig. 82) să considerăm două puncte A, B pe dreapta d. Dacă

$$A' = H(A), \qquad B' = H(B),$$

avem:

$$A'B' \parallel AB \text{ sau } A'B' \parallel d.$$

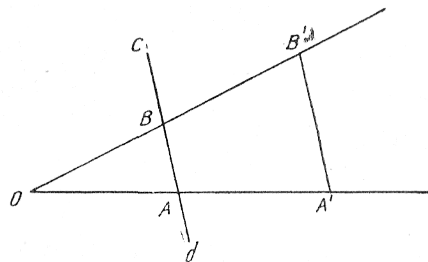


Fig. 82

Dacă C este un alt punct al dreptei d și dacă $C' = H(C)$, vom avea $A'C' \parallel AC$ sau $A'C' \parallel d$; comparînd cu relația precedentă și aplicînd axioma VIII, rezultă:

$$A'B' = A'C',$$

deci punctele A', B', C' sînt coliniare. Teorema 20 este astfel demonstrată.

Vom numi *automorfism special* al spațiului afin, orice transformare T, care duce puncte distincte în puncte distincte și astfel că oricare ar fi dreapta d, transformata ei prin T este o dreaptă paralelă sau condundată cu d.

T e o r e m a 21. *Orice automorfism special T al spațiului afin este fie o translație, fie o omotetie.*

Fie P un punct al spațiului, $P' = T(P)$, $d = PP'$. Dreapta $d' = T(d)$ este paralelă sau confundată cu d. Dar d' și d au punctul comun P', deci $d' = d$.

O dreaptă care coincide cu transformata sa se numește *invariantă*. Deci dreptele care unesc puncte omologe P, $T(P)$ sînt invariante.

Fie Q un punct nesituat pe dreapta d, $Q' = T(Q)$ și $\delta = QQ'$. δ este o dreaptă invariantă. Dreapta $P'Q'$ este transformata dreptei PQ, deci avem $P'Q' \parallel PQ$, prin urmare, dreptele d, δ sînt coplanare. Distingem două cazuri:

Cazul 1. Dreptele δ, d sînt paralele (fig. 83). În acest caz, avem:

$$\overrightarrow{PP'} \sim \overrightarrow{QQ'}.$$

Fie R un punct nesituat pe dreptele d, δ și fie $R' = T(R)$. Avem $PR \parallel P'R'$, $QR \parallel Q'R'$. Fie l paralela dusă din R la dreapta d și R'' intersecția lui l cu $Q'R'$.

Aplicînd teorema lui Desargues triunghiurilor PQR, $P'Q'R''$ rezultă $P'R'' \parallel PR$, deci, cum avem $P'R' \parallel PR$, rezultă $P'R'' = P'R'$.

Dreptele $Q'R'$, $P'R'$ nu coincid și cum ele nu pot avea două puncte comune R', R'' rezultă că avem $R' = R''$, deci $RR' = l$ sau:

$$RR' \parallel PP' \parallel QQ'.$$

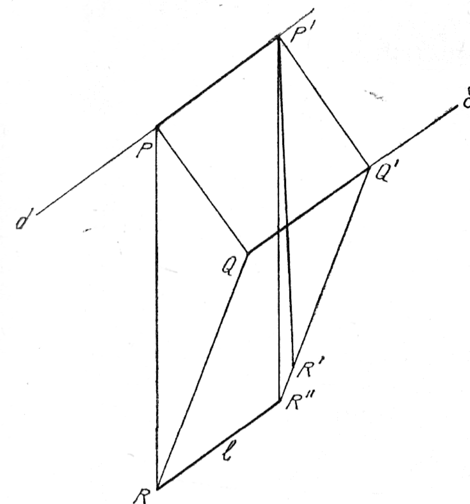


Fig. 83

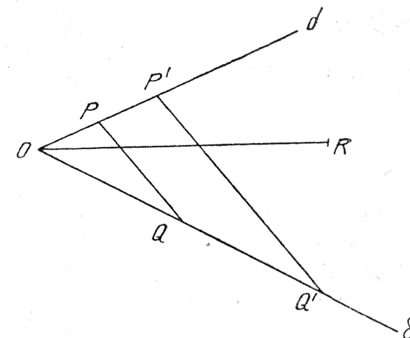


Fig. 84

Cum avem și $PR \parallel P'R'$, rezultă:

$$\overrightarrow{RR'} \sim \overrightarrow{PP'}.$$

Deci în cazul 1, transformarea T este o translație, definită de orice vector de forma $\overrightarrow{PP'}$, unde $P' = T(P)$.

Cazul 2. Dreptele d, δ au un punct comun O (fig. 84). Atunci $T(O) = O$, deoarece T (0) aparține dreptelor $T(d) = d, T(\delta) = \delta$.

Fie R un punct oarecare, $R' = T(R)$. Notînd $l = OR$, $l' = RR'$, avem $T(l) = OR'$. Dar $T(l)$ e paralelă sau confundată cu l. Avînd punctul O comun cu l, rezultă $T(l) = l$, deci $OR' = OR$ și punctele O, R, R' sînt coliniare. Din $PR \parallel P'R'$ rezultă că T este o omotetie cu centrul în punctul O.

Din demonstrație rezultă că translațiile se deosebesc de omotetii prin faptul că translațiile n-au puncte invariante (fixe), în timp ce

o omotetie are ca punct fix centrul său. De asemenea, rezultă că automorfismele speciale sînt transformări biunivoce, deoarece atît translațiile cît și omotetiile au această proprietate.

Teorema 22. *Orice omotetie se poate descompune în produsul unei translații cu o omotetie avînd centrul într-un punct dat O.*

Într-adevăr, fie H o omotetie oarecare și $O' = H(O)$. Vectorul $\overrightarrow{O'O}$ definește o translație T. Transformarea TH este un automorfism special al spațiului afin, care lasă invariant punctul O:

$$(TH)(O) = T(H(O)) = T(O') = O.$$

Deci $H' = TH$ este o omotetie de centru O. Relația $H' = TH$ dă, prin înmulțire la stînga cu translația T' definită de vectorul $\overrightarrow{OO'}$,

$$T'H' = T'(TH) = (T'T)H = H, \text{ deci:}$$

$$H = T'H'.$$

Se numește *grup de transformări* al spațiului o familie nevidă de transformări biunivoce, care o dată cu două transformări T, S conține și produsul TS, și o dată cu o transformare T conține și transformarea inversă T^{-1}.

Transformarea inversă T^{-1} este transformarea care transformă un punct $T(P)$ în punctul P.

Teorema 23. *Automorfismele speciale ale spațiului afin formează un grup de transformări.*

Fie S, T două automorfisme speciale. Dacă d este o dreaptă oarecare, $d' = S(d)$ este o dreaptă paralelă sau confundată cu d și $d'' = T(d') = (TS)(d)$ este o dreaptă paralelă sau confundată cu d', deci avem:

$$(TS)(d) = d \quad \text{sau} \quad (TS)(d) \| d.$$

Să arătăm că TS este biunivocă. Dacă R este un punct oarecare al spațiului, există Q, astfel ca $T(Q) = R$ și există apoi punctul P astfel ca $S(P) = Q$. Atunci $(TS)(P) = R$.

Fie P, Q astfel ca $(TS)(P) = (TS)(Q)$, deci punînd $P' = S(P)$, $Q' = S(Q)$, avem:

$$T(P') = T(Q').$$

T fiind biunivocă, avem $P' = Q'$ și S fiind și ea biunivocă, rezultă $P = Q$. Deci TS este biunivocă.

Inversul unui automorfism special este un automorfism special, deoarece din $T(d) = d$ sau $T(d) \| d$ rezultă $d = T^{-1}(d)$ sau $d \| T^{-1}(d)$.

Inversa transformării TS este transformarea $S^{-1}T^{-1}$, deoarece dacă $P' = S(P)$, $P'' = T(P') = TS(P)$, avem $P' = T^{-1}(P'')$ și $P = S^{-1}(P')$, deci:

$$(S^{-1}T^{-1})(P'') = S^{-1}(T^{-1}(P'')) = S^{-1}(P') = P.$$

Am arătat mai sus că produsul a două translații și inversa unei translații sînt de asemenea translații. Deci translațiile formează și ele un grup.[1]

Vom nota cu $\mathcal{S}$ grupul automorfismelor speciale ale spațiului afin și cu Γ grupul translațiilor. Γ este un *subgrup* al grupului $\mathcal{S}$.

Teorema 24. *Omotetiile avînd același centru O formează grup.*

Într-adevăr, dacă H_1, H_2 sînt omotetii cu centrul O, $H_1 H_2$ și H_1^{-1} sînt automorfisme speciale avînd punctul fix O, deci sînt omotetii de centru O.

Teorema 25. *Grupul translațiilor Γ este un subgrup invariant al grupului $\mathcal{S}$, deci pentru orice translație T și orice automorfism special S, STS^{-1} este o translație.*

Într-adevăr dacă S este o translație, avem $ST = TS$ și deci:

$$STS^{-1} = TSS^{-1} = T.$$

Dacă S este o omotetie, fie O centrul ei și $\overrightarrow{PP'}$, un vector ce definește translația T (Fig. 85.) Putem presupune că O nu este pe suportul PP' al vectorului $\overrightarrow{PP'}$.

Fie $Q = S(P)$, $Q' = S(P')$.

Atunci avem:

$$QQ' \| PP'.$$

Pe de altă parte,

$$(STS^{-1})Q = (ST)(S^{-1}Q) = (ST)(P) = S(P') = Q'.$$

[1] Acest grup este izomorf cu grupul L al vectorilor liberi, deoarece corespondența φ care asociază fiecărui vector liber $\{\overrightarrow{AB}\}$ translația $T_{\overrightarrow{AB}}$ este biunivocă și păstrează legile de compunere: $\varphi(\{\overleftrightarrow{AB}\} + \{\overrightarrow{BC}\}) = \varphi(\{\overrightarrow{AC}\}) = T_{\overrightarrow{AC}} = T_{\overrightarrow{AB}} T_{\overrightarrow{BC}} = \varphi(\{\overleftrightarrow{AB}\}) + \varphi(\{BC\})$. Se mai spune că φ realizează grupul L ca *grup de transformări al spațiului afin*.

Deci punînd $T' = STS^{-1}$, rezultă că T' este un automorfism special ce are proprietatea că dreptele de forma QQ', $Q' = T'(Q)$ sînt paralele cu o dreaptă fixă PP'. Din demonstrația teoremei 21 rezultă că T' este o translație, definită de un vector paralel cu vectorul $\overrightarrow{PP'}$ care definește translația T.

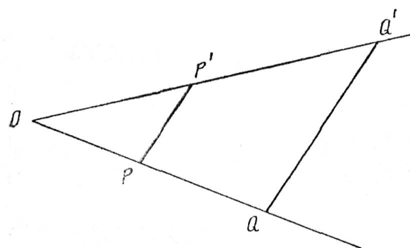


Fig. 85

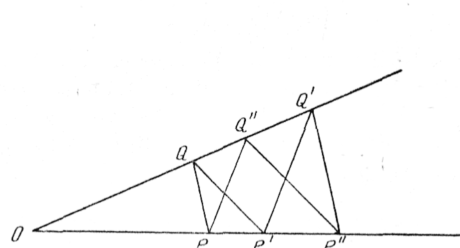


Fig. 86

T e o r e m a 26. *Grupul omotetiilor avînd acelaşi centru este comutativ dacă şi numai dacă în spațiul afin este adevărată propoziția lui Pappus-Pascal.*[1]

Fie T_1, T_2 două omotetii de centru O, P un punct oarecare diferit de O şi Q un punct exterior dreptei OP (Fig. 86). Fie apoi $P' = T_1(P)$, $P'' = T_2(P')$. Punctul $Q'' = T_2(Q)$ se obține intersectînd dreapta OQ cu paralela dusă din P'' la QP'. Apoi $Q' = T_1(Q'')$ se obține intersectînd dreapta OQ cu paralela dusă din P' la PQ''. Avem:

$$P'' = (T_2T_1)(P), \quad Q' = (T_1T_2)(Q).$$

Omotetiile T_1T_2, T_2T_1 cu centrul O coincid dacă dreptele PQ, $P''Q'$ sînt paralele. Or, relația $PQ \| P''Q'$ rezultă din relațiile $PQ'' \| P'Q'$, $P'Q \| P''Q''$ dacă este adevărată propoziția lui Pappus-Pascal.

T e o r e m a 27. *Fie H_1, H_2 două omotetii avînd acelaşi centru O. Transformarea T, care duce fiecare punct P în punctul P', astfel ca punînd $P_1 = H_1(P)$, $P_2 = H_2(P)$, $u_1 = \overrightarrow{OP_1}$, $u_2 = \overrightarrow{OP_2}$, $u' = \overrightarrow{OP'}$ să avem: $T_{u'} = T_{u_1} \cdot T_{u_2}$, este o omotetie de centru O*[2].

Transformarea T lasă invariantă fiecare dreaptă ce trece prin O. Fie d o dreaptă ce nu trece prin O şi X, Y două puncte ale ei; fie $X_1 = H_1(X)$, $X_2 = H_2(X)$, $Y_1 = H_1(Y)$, $Y_2 = H_2(Y)$ (fig. 87).

[1] Enunțul acestei propoziții este: dacă, în fig. 86 $PQ'' \| P'Q'$ şi $P'Q \| P''Q''$, atunci $PQ \| P''Q'$.
[2] Omotetia T va fi notată $H_1 + H_2$ şi se va numi *suma omotetiilor* H_1, H_2.

Vom presupune că $H_1 \neq H_2$.
Avem atunci $X_1 \neq X_2$, $Y_1 \neq Y_2$ şi

$$XY \| X_1Y_1 \| X_2Y_2.$$

Punctul $U = T(X)$ se construieşte ducînd vectorul $\overrightarrow{X_2U}$ echipolent cu $\overrightarrow{OX_1}$ şi $V = T(Y)$ se obține din vectorul $\overrightarrow{Y_2V}$ echipolent cu $\overrightarrow{OY_1}$.

Dacă ducem din X_1, Y_1 paralela la OY respectiv OX, aceste paralele se întîlnesc într-un punct A şi avem:

$$\overrightarrow{X_2U} \sim \overrightarrow{OX_1} \sim \overrightarrow{Y_1A},$$

$$\overrightarrow{Y_2V} \sim \overrightarrow{OY_1} \sim \overrightarrow{X_1A},$$

deci:

$$AU \| X_2Y_1, \qquad AV \| X_1Y_2.$$

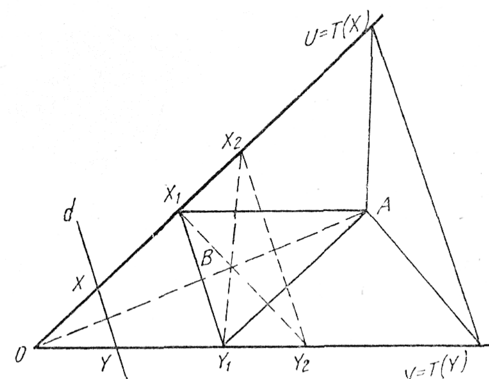


Fig. 87

Triunghiurile AX_1Y_1, OX_2Y_2 avînd laturile paralele, din reciproca teoremei lui Desargues (se demonstrează prin reducere la absurd) rezultă că dreptele AO, X_1Y_2, X_2Y_1 sînt concurente sau paralele, deci dreptele X_2Y_1, X_1Y_2 se taie într-un punct B al dreptei AO sau sînt paralele cu această dreaptă. În primul caz, aplicînd teorema lui Desargues triunghiurilor AUV, BX_2Y_2 rezultă $UV \| X_2Y_2$, deci:

$$UV \| XY.$$

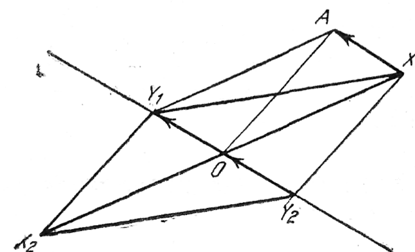


Fig. 88

Dacă Z este un al treilea punct al dreptei XY, punînd $W = T(Z)$, va rezulta:

$$UW \| XZ, \text{ deci } UW \| XY$$

şi comparînd cu rezultatul precedent, rezultă că punctele U, V, W sînt pe o dreaptă paralelă cu dreapta punctelor X, Y, Z. Deci transformarea T este o omotetie de centru O.

Dacă dreptele X_1Y_2, X_2Y_1 sînt paralele cu OA (fig. 88), deoarece avem $X_1Y_1 \| X_2Y_2$, rezultă:

$$\overrightarrow{X_1A} \sim \overrightarrow{Y_2O}, \quad \overrightarrow{X_1A} \sim \overrightarrow{OY_1},$$

deci avem:

$$\overrightarrow{Y_2O} \sim \overrightarrow{OY_1},$$

de unde deducem că avem, notînd cu T_1, T_2 translațiile definite de vectorii $\overrightarrow{OY_1}$, $\overrightarrow{OY_2}$,

$$(H_1 + H_2)(Y) = (T_1T_2)(O) = T_1(Y_2) = 0.$$

Y fiind un punct oarecare, rezultă că transformarea $H_1 + H_2$ este *omotetia nulă* de centru O, deci transformarea care duce toate punctele spațiului afin în punctul O.

Fig. 89

Dacă $H_1 = H_2$, avem $X_2 = X_1$, $Y_2 = Y_1$ și punctele $X' = (H_1 + H_2)(X)$, $Y' = (H_1 + H_2)(Y)$ se obțin ducînd vectorii (fig. 89) $\overrightarrow{X_1A} \sim \overrightarrow{OY_1}$, $\overrightarrow{Y_1A} \sim \overrightarrow{OX_1}$, și apoi $\overrightarrow{X_1X'} \sim \overrightarrow{Y_1A}$, $\overrightarrow{Y_1Y'} \sim \overrightarrow{X_1A}$. Atunci avem $AX' \| Y_1X_1 \| AY'$, deci AX', AY' sînt drepte paralele X_1Y_1, deci coincid și dreapta $X'Y'$ este paralelă cu X_1Y_1, deci și cu XY.

§ 4. INTRODUCEREA COORDONATELOR ÎN SPAȚIUL AFIN DUPĂ ARTIN

Fie O un punct fix al spațiului afin. Notăm cu C mulțimea omotetiilor de centru O. C conține în particular omotetia identitate $\mathcal{I}$ și omotetia nulă $\mathcal{O}$. Avem pentru orice omotetie H din C

$$H\mathcal{I} = \mathcal{I}H = H \tag{16}$$

și orice omotetie nenulă H admite o omotetie inversă H^{-1} astfel că

$$HH^{-1} = H^{-1}H = \mathcal{I} \tag{17}$$

[1] E. Artin, *Geometric Algebra*, New York, 1957.

Fie H_1, H_2 două omotetii din C. Pentru un punct oarecare P din spațiu, să notăm cu u_1, u_2 vectorii

$$u_1 = \overrightarrow{OP_1}, \ u_2 = \overrightarrow{OP_2}, \text{ unde } P_1 = H_1(P), \ P_2 = H_2(P). \tag{18}$$

În paragraful precedent am arătat că transformarea

$$P \to T_{u_1}T_{u_2}(O) \tag{19}$$

este o omotetie de centru O și am notat această omotetie cu $H_1 + H_2$. Avem deci:

$$(H_1 + H_2)(P) = T_{u_1}T_{u_2}(O) \tag{20}$$

și translațiile T_{u_1}, T_{u_2} sînt legate de punctul P și de omotetiile H_1, H_2 prin relațiile ce rezultă din (18),

$$T_{u_1}(O) = H_1(P), \quad T_{u_2}(O) = H_2(P). \tag{21}$$

Am definit deci în mulțimea C două operații: înmulțirea, dată de compunerea omotetiilor și adunarea, dată de formulele (20), (21). Vrem să arătăm că *C este față de aceste operații un corp*, deci că ele verifică regulile obișnuite de calcul cu numere.

Într-adevăr, compunerea translațiilor fiind comutativă și asociativă, rezultă din formula (20) că adunarea în C este comutativă și asociativă, deci avem:

$$H_1 + H_2 = H_2 + H_1, \ (H_1 + H_2) + H_3 = H_1 + (H_2 + H_3). \tag{22}$$

Dacă în formula (20) presupunem că H_2 este omotetia nulă $\mathcal{O}$, din (21) rezultă $T_{u_2}(O) = O$, și obținem:

$$(H_1 + \mathcal{O})(P) = T_{u_1}(O) = H_1(P),$$

deci oricare ar fi omotetia H, avem:

$$H + \mathcal{O} = H. \tag{23}$$

Dacă asociem fiecărei omotetii H omotetia $-H$ dată de formula

$$(-H)(P) = Q, \quad (\overrightarrow{OQ} \sim \overrightarrow{P'O}, \ P' = H(P)), \tag{23'}$$

avem:

$$-H + H = \mathcal{O}. \tag{23''}$$

Compunerea omotetiilor fiind asociativă, avem pentru trei omotetii arbitrare H_1, H_2, H_3 din C

$$(H_1H_2)H_3 = H_1(H_2H_3). \tag{24}$$

Fie H_1, H_2, H trei omotetii arbitrare în C. Să demonstrăm formula de distributivitate

$$(H_1 + H_2)H = H_1H + H_2H. \tag{25}$$

Fie P un punct oarecare în spaţiu şi fie $P' = H(P)$; avem:

$$((H_1 + H_2)H)(P) = (H_1 + H_2)(P'). \tag{26}$$

Notînd cu T_1, T_2 translaţiile pentru care avem

$$H_1(P') = T_1(O), \quad H_2(P') = T_2(O), \tag{27}$$

din (20) şi (26) rezultă:

$$((H_1 + H_2)H)\ (P) = (T_1T_2)\ (O). \tag{28}$$

Din faptul că $P' = H(P)$ şi din (27) rezultă

$$(H_1H)\ (P) = T_1(O), \quad H_2H(P) = T(O)$$

şi comparînd cu (20) şi (21) deducem:

$$(H_1H + H_2H)\ (P) = (T_1T_2)\ (O), \tag{29}$$

astfel încît formula (28) devine:

$$((H_1 + H_2)H)\ (P) = (H_1H + H_2H)\ (P),$$

ceea ce demonstrează formula (25).

Să demonstrăm în sfîrşit formula:

$$H(H_1 + H_2) = HH_1 + HH_2. \tag{30}$$

Fie P un punct oarecare în spaţiu şi fie T_1, T_2 translaţiile pentru care

$$H_1(P) = T_1(O), \quad H_2(P) = T_2(O). \tag{31}$$

Atunci avem:

$$(H_1 + H_2)\ (P) = (T_1T_2)\ (O).$$

Aplicînd omotetia H, rezultă:

$$(H(H_1 + H_2))\ (P) = (HT_1T_2)\ (O).$$

Putem însă scrie:

$$HT_1T_2 = (HT_1H^{-1})HT_2, \quad O = H^{-1}(O)$$

şi rezultă:

$$(H(H_1 + H_2))\ (P) = (HT_1H^{-1})\ (HT_2H^{-1})\ (O).$$

Ştim că transformările

$$T_1' = HT_1H^{-1}, \quad T_2' = HT_2H^{-1} \tag{32}$$

sînt translaţii şi rezultă din ultima formulă

$$(H(H_1 + H_2))\ (P) = (T_1'T_2')\ (O). \tag{33}$$

Din (31) şi (32) rezultă pe de altă parte

$$T_1'(O) = (HT_1)\ (O) = (HH_1)\ (P),$$

$$T_2'(O) = (HT_2)\ (O) = (HH_2)\ (P),$$

astfel încît din formulele (20), (21) deducem:

$$(T_1'T_2')\ (O) = (HH_1 + HH_2)\ (P) \tag{34}$$

şi comparînd cu (33) rezultă formula (30).

Formulele (16), (17), (22), (23), (23''), (24), (25), (30) arată că familia C a omotetiilor de acelaşi centru O formează un corp, avînd ca element unitate omotetia identitate $\mathcal{I}$ şi ca element neutru omotetia nulă $\mathcal{O}$. Corpul C se numeşte *corpul coordonatelor* spaţiului afin.

Să considerăm acuma translaţiile spaţiului afin şi să convenim să notăm de acum înainte prin $T_1 + T_2$ produsul translaţiilor T_1, T_2, iar prin $H(T)$ translaţia dată de formula:

$$H(T) = HTH^{-1}, \tag{35}$$

T fiind o translaţie, iar H o omotetie nenulă de centru O. Dacă translaţia T este definită de vectorul $\overrightarrow{OA}$, deci dacă $T(O) = A$, atunci $H(T)$ duce punctul O în punctul $H(A) = A'$, deci translaţia $H(T)$ este definită de vectorul $H(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA'}$. Avem:

$$H(T_1 + T_2) = HT_1T_2H^{-1} = HT_1H^{-1} \cdot HT_2H^{-1},$$

deci:

$$H(T_1 + T_2) = H(T_1) + H(T_2). \tag{36}$$

De asemenea, H' fiind o altă omotetie de centru O, avem:

$$H'(H(T)) = H' \cdot H(T) \cdot H'^{-1} =$$
$$= H' \cdot HTH^{-1} \cdot H'^{-1} = H'H \cdot T \cdot (H'H)^{-1},$$

deci:

$$H'(H(T)) = (H'H)\,(T). \tag{37}$$

Fie $H = H_1 + H_2$. Pentru un punct P din spațiu, avem:

$$(H(T))\,(P) = ((H_1 + H_2)T\,(H_1 + H_2)^{-1})\,(P). \tag{38}$$

Pentru a determina translația $H(T)$, este suficient să cunoaștem punctul $O' = (H(T))\,(O)$. Pentru $P = O$, formula (38) dă:

$$(H(T))\,(O) = (H_1 + H_2)\,(T(O)). \tag{39}$$

Fie $T(O) = A$, $H_1(T(O)) = A_1 = T_1(O)$, $H_2(T(O)) = A_2 = T_2(O)$.

Atunci

$$(H_1 + H_2)\,(T(O)) = (T_1T_2)\,(O). \tag{40}$$

Pe de altă parte avem, $H_1(T)$ și $H_2(T)$ fiind translații,

$$(H_1(T) + H_2(T))\,(O) = (H_1(T) \cdot H_2(T))\,(O) =$$
$$= (H_1TH_1^{-1} \cdot H_2TH_2^{-1})\,(O) = (H_1TH_1^{-1} \cdot H_2T)\,(H_2^{-1}(O)) =$$
$$= (H_1TH_1^{-1})\,(H_2T)(O) = (H_1TH_1^{-1})\,(A_2) =$$
$$= (H_1TH_1^{-1})\,(T_2(O)) = (H_1TH_1^{-1} \cdot T_2)\,(O).$$

Observînd că avem:

$$T_1(O) = A_1 = (H_1T)\,(O) = (H_1TH_1^{-1})\,(O),$$

deci:

$$T_1 = H_1TH^{-1},$$

ultima formulă se scrie:

$$(H_1(T) + H_2(T))\,(O) = (T_1T_2)\,(O)$$

și comparînd cu (40) rezultă:

$$(H_1 + H_2)(T) = H_1(T) + H_2(T). \tag{41}$$

Dacă H este omotetia identică $\mathcal{J}$, avem evident:

$$\mathcal{J}(T) = \mathcal{J}T\mathcal{J}^{-1} = T. \tag{42}$$

Formulele (36), (37), (41), (42) arată că *translațiile spațiului afin formează un spațiu vectorial peste corpul C*[1]. Acest spațiu se numește *spațiul translațiilor* asociat spațiului afin.

Obținem o imagine geometrică a acestui spațiu dacă fixăm un punct O în spațiu și asociem fiecărei translații T punctul $P = T(O)$ și apoi vectorul $\overrightarrow{OP}$. În acest fel stabilim o corespondență biunivocă între translațiile spațiului afin și vectorii cu originea în O. Omotetiile de centru O operează asupra vectorilor $\overrightarrow{OP}$ prin formula:

$$H(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP'}, \quad (P' = H(P))$$

și suma a doi vectori $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$ se obține considerînd vectorul $\overrightarrow{OP}$, unde P este punctul, astfel ca $\overrightarrow{P_2P} \sim \overrightarrow{OP_1}$.

Pentru a construi corpul coordonatelor C am ales un punct fix O, centrul comun al omotetiilor ce formează corpul C. Dacă alegem alt punct fix O', se obține în același fel un corp C'.

T e o r e m a 1. *Corpurile C, C' sînt izomorfe printr-o corespondență $H \to H'$ cu proprietățile:*

1. *Dacă $H_1 \to H_1'$ și $H_2 \to H_2'$, atunci $H_1 + H_2 \to H_1' + H_2'$ și $H_1H_2 \to H_1'H_2'$.*
2. *Dacă $H \to H'$ și T este o translație, atunci $H(T) = H'(T)$.*

Într-adevăr, să notăm cu A translația care duce punctul O în O', deci pentru care avem:

$$A(O) = O',$$

și să asociem fiecărei omotetii H din corpul C transformarea

$$H' = AHA^{-1}. \tag{43}$$

Transformarea H' este un automorfism special, fiind un produs de automorfisme speciale, și avem:

$$H'(O') = A(H(A^{-1}(O'))) = A(H(O)) = A(O) = O'.$$

---

[1] Se numește *spațiu vectorial peste un corp* C un grup comutativ Γ pentru care s-a dat o lege de înmulțire a unui element din C cu un element din Γ, verificînd condițiile (36), (37), (41), (42). Și grupul L al vectorilor liberi se poate organiza ca spațiul vectorial peste corpul C. Se obține atunci un spațiu vectorial izomorf cu Γ. Aceste două spații vectoriale au dimensiunea 3, în sensul că există sisteme formate din cîte 3 translații sau 3 vectori liberi, astfel ca orice vector să se scrie în mod unic ca o combinație liniară cu coeficienți în C de cele trei translații sau de cei trei vectori liberi (v. p. 210).

Rezultă că H' este o omotetie de centru O', deci $H' \in C'$, (H' aparține corpului C'). Dacă avem:

$$H_1' = AH_1A^{-1}, \quad H_2' = AH_2A^{-1},$$

avem și

$$H_1'H_2' = (AH_1A^{-1})(AH_2A^{-1}) = A(H_1H_2)A^{-1}, \tag{44}$$

deci prin (43), omotetiei $H_1H_2 \in C$ îi corespunde $H_1'H_2' \in C'$.

Fie P un punct oarecare în spațiu, $P' = A^{-1}(P)$ și $P_1 = H_1(P')$, $P_2 = H_2(P')$ și fie T_1, T_2 translațiile pentru care avem $T_1(O) = P_1$, $T_2(O) = P_2$. Atunci $(H_1 + H_2)(P') = (T_1T_2)(O)$ și rezultă:

$$(A(H_1 + H_2))(A^{-1}(P)) = (A(H_1 + H_2))(P') = (AT_1T_2)(O) =$$
$$= (AT_1T_2A^{-1})(O') = ((AT_1A^{-1})(AT_2A^{-1})(O').$$

Ultima expresie ne arată că avem:

$$(A(H_1 + H_2)A^{-1})(P) = (H_1' + H_2')(P), \tag{44'}$$

unde H_1', H_2' sînt omotetiile de centru O' legate de translațiile AT_1A^{-1}, AT_2A^{-1} prin relațiile

$$H_1'(P) = (AT_1A^{-1})(O'), \quad H_2'(P) = (AT_2A^{-1})(O').$$

Avem deci:

$$H_1'(P) = (AT_1)(O) = A(T_1(O)) = A(P_1) = (AH_1)(P') = (AH_1A^{-1})(P),$$
$$H_2'(P) = (AT_2)(O) = A(T_2(O)) = A(P_2) = (AH_2)(P') = (AH_2A^{-1})(P)$$

și rezultă că H_1', H_2' sînt omotetiile care corespund prin (43) omotetiilor H_1, H_2. Formulele (44), (44') demonstrează prima parte a teoremei 1.

Partea a doua rezultă imediat, deoarece avem:

$$H'(T) = H'TH'^{-1} = AHA^{-1} \cdot T \cdot AH^{-1}A^{-1}.$$

Dar A, T, A^{-1} sînt translații, deci:

$$A^{-1}TA = A^{-1}AT = T$$

și rezultă

$$H'(T) = A \cdot HTH^{-1} \cdot A^{-1};$$

HTH^{-1} fiind de asemenea o translație, este permutabilă cu A^{-1} și rezultă:

$$H'(T) = AA^{-1} \cdot HTH^{-1} = HTH^{-1} = H(T).$$

Din teorema demonstrată mai sus rezultă că alegerea punctului O nu influențează asupra proprietăților corpului C și asupra modului în care acest corp acționează asupra spațiului translațiilor.

De acum înainte vom presupune că am ales un punct fix O pentru definiția corpului C.

Să notăm cu T, T' două translații *paralele*, deci definite de vectorii u, u' paraleli sau coliniari. Putem presupune că acești vectori au originea în punctul O. Fie $u = \overrightarrow{OA}$, $u' = \overrightarrow{OA'}$. Atunci punctele O, A, A' sînt coliniare; să presupunem că $T \neq O$, deci $A \neq O$. Atunci punctele O, A, A' definesc o omotetie H și avem:

$$H(T)H\ TH^{-1}\ T',$$

deoarece:

$$(HTH^{-1})(O) = (HT)(O) = H(T(O)) = H(A) = A' = T'(O).$$

Vom nota omotetia H prin simbolul $\frac{T'}{T}$. Avem deci:

$$\frac{T'}{T} \in C \quad \text{și} \quad \frac{T'}{T}(T) = T'. \tag{45}$$

Revenind la corpul C al omotetiilor de centru O, să observăm că dacă T, T', T'' sînt translații paralele nenule, avem:

$$\frac{T}{T'} \cdot \frac{T'}{T''} = \frac{T}{T''}, \tag{46}$$

$$\frac{T' + T''}{T} = \frac{T'}{T} + \frac{T''}{T}. \tag{47}$$

Pentru demonstrarea primei formule, să punem:

$$H = \frac{T}{T'}, \quad H' = \frac{T'}{T''}.$$

Atunci avem $H(T') = T$, $H'(T'') = T'$, deci:

$$T = HT'H^{-1} = H \cdot H'T''H'^{-1} \cdot H^{-1} = (HH')T''(HH')^{-1} =$$
$$= (HH')(T''),$$

deci avem:

$$\frac{T}{T''} = HH' = \frac{T}{T'} \cdot \frac{T'}{T''}.$$

A doua formulă rezultă observînd că avem, datorită formulei (41),

$$\left(\frac{T'}{T}+\frac{T''}{T}\right)(T)=\frac{T'}{T}(T)+\frac{T''}{T}(T)=T'+T''.$$

Vom numi *sistem de coordonate carteziene* în spațiul afin orice figură formată din patru puncte necoplanare $\Omega A_1A_2A_3$ (fig. 90). Punctul Ω se numește *originea sistemului,* iar dreptele ΩA_1, ΩA_2, ΩA_3 se numesc *axele sistemului.* Punctele A_1, A_2, A_3 se numesc *punctele unitate* ale axelor.

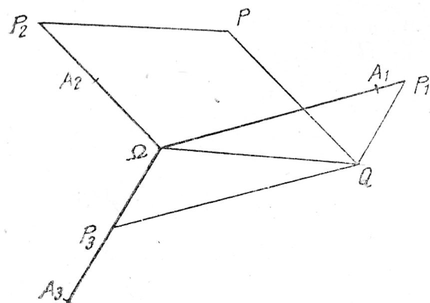


Fig. 90

Fiecărui punct P din spațiu îi putem asocia trei elemente X_1, X_2, X_3 din corpul C al omotetiilor cu centrul în punctul fixat O al spațiului.

Să ducem prin punctul P plane paralele la planele ΩA_2A_3, ΩA_3A_1, ΩA_1A_2. Aceste plane intersectează axele ΩA_1, ΩA_2, ΩA_3 în trei puncte P_1, P_2, P_3. Într-adevăr, de exemplu dreapta ΩA_1 nu poate fi paralelă cu planul π_1 dus prin P paralel la planul ΩA_2A_3, deoarece paralelele duse prin Ω la planul π_1 se găsesc în planul ΩA_2A_3 și A_1 nu aparține acestui plan. Punctul P_1 se mai poate obține intersectînd paralela PQ dusă prin P la ΩA_2 cu planul ΩA_1A_3 în punctul Q și ducînd prin Q paralela δ la ΩA_3; această paralelă intersectează axa ΩA_1 într-un punct P_1, deoarece δ și PQ se găsesc în planul π_1, fiind paralele cu două drepte din planul ΩA_2A_3. Punctul P_3 se mai poate obține ducînd prin Q paralela la ΩA_1 și intersectînd această paralelă cu axa ΩA_3, iar P_2 se găsește la intersecția axei ΩA_2 cu paralela dusă prin P la dreapta ΩQ.

Să notăm cu S_1, S_2, S_3 translațiile definite de vectorii $\overrightarrow{\Omega A_1}$, $\overrightarrow{\Omega A_2}$, $\overrightarrow{\Omega A_3}$; atunci avem:

$$S_1(\Omega)=A_1,\ S_2(\Omega)=A_2,\quad S_3(\Omega)=A_3. \tag{48}$$

Să notăm cu T_1, T_2, T_3 translațiile definite de vectorii $\overrightarrow{\Omega P_1}$, $\overrightarrow{\Omega P_2}$, $\overrightarrow{\Omega P_3}$. Atunci avem:

$$T_1(\Omega)=P_1,\quad T_2(\Omega)=P_2,\quad T_3(\Omega)=P_3. \tag{49}$$

În sfîrșit, să notăm cu T translația definită de vectorul $\overrightarrow{\Omega P}$, deci pentru care avem:

$$T(\Omega)=P. \tag{50}$$

Avem din definiția punctelor P_1, P_2, P_3, Q,

$$P_1=T_1(\Omega),\quad Q=T_3(P_1)=(T_3+T_1)(\Omega),$$
$$P=T_2(Q)=(T_1+T_2+T_3)(\Omega)$$

și rezultă:

$$T=T_1+T_2+T_3. \tag{51}$$

Prin urmare, orice translație se poate descompune în suma a trei translații, de-a lungul axelor ΩA_1, ΩA_2, ΩA_3.

Fie, folosind notația dată de formula (41),

$$X_1=T_1/S_1,\quad X_2=T_2/S_2,\quad X_3=T_3/S_3. \tag{52}$$

Atunci avem:

$$X_1(S_1)=T_1,\quad X_2(S_2)=T_2,\quad X_3(S_3)=T_3 \tag{53}$$

și formula (51) devine:

$$T=X_1(S_1)+X_2(S_2)+X_3(S_3). \tag{54}$$

Formula (54) dă o descompunere a translației T cu ajutorul translațiilor S_1, S_2, S_3, care sînt fixe, și cu ajutorul a trei elemente X_1, X_2, X_3 din corpul C. Elementele X_1, X_2, X_3 se numesc *componentele translației* T în raport cu sistemul de coordonate $\Omega A_1A_2A_3$ și de asemenea, *coordonatele punctului* P în raport cu acest sistem. Pentru un punct P din planul ΩA_2A_3 avem $P_1=\Omega$, deci $T_1=0$ și $X_1=0$. Reciproc, dacă pentru un punct P avem $X_1=0$, atunci avem $T_1=0$ și $P_1=T_1(\Omega)=\Omega$, deci P se găsește în planul ΩA_2A_3. Rezultă că acest plan este definit de ecuația $X_1=0$ și analog, planele ΩA_1A_2, ΩA_1A_3 sînt definite de ecuațiile $X_3=0$ respectiv $X_2=0$.

Vrem să vedem acum cum se pot exprima analitic translațiile și omotetiile spațiului afin. Fie U o translație de componente U_1, U_2, U_3 în raport cu sistemul $\Omega A_1A_2A_3$ și fie $P(X_1, X_2, X_3)$ un punct oarecare al spațiului și $P'(X_1', X_2', X_3')$ transformatul său prin translația U. Avem:

$$P=(X_1(S_1)+X_2(S_2)+X_3(S_3))(\Omega),$$
$$P'=(X_1'(S_1)+X_2'(S_2)+X_3'(S_3))(\Omega)$$

şi, pe de altă parte,

$$P' = U(P) = (U + X_1(S_1) + X_2(S_2) + X_3(S_3))(\Omega) =$$
$$= (U_1(S_1) + U_2(S_2) + U_3(S_3) + X_1(S_1) + X_2(S_2) +$$
$$+ X_3(S_3))(\Omega);$$

utilizînd formula (41), mai putem scrie:

$$P' = ((U_1 + X_1)(S_1) + (U_2 + X_2)(S_2) +$$
$$+ (U_3 + X_3)(S_3))(\Omega)$$

şi rezultă relaţiile:

$$X_1' = X_1 + U_1$$
$$X_2' = X_2 + U_2$$
$$X_3' = X_3 + U_3,$$

care definesc analitic translaţia U, deoarece permit să se afle coordonatele punctului $P' = U(P)$ în funcţie de coordonatele punctului P. Din aceste formule rezultă de asemenea că fiind date două puncte oarecare $P(X_1, X_2, X_3)$, $P'(X_1', X_2', X_3')$, translaţia U definită de vectorul $\overrightarrow{PP'}$, are componentele:

$$U_1 = X_1' - X_1, \quad U_2 = X_2' - X_2, \quad U_3 = X_3' - X_3.$$

Să considerăm acum o omotetie H de centru $C(C_1, C_2, C_3)$. Fie $P(X_1, X_2, X_3)$ un punct oarecare în spaţiu şi $P'(X_1', X_2', X_3')$ transformatul său. Notînd cu Γ translaţia ce duce punctul Ω în C, avem

$$P' = (X_1'(S_1) + X_2'(S_2) + X_3'(S_3))(\Omega) = H(P) =$$
$$= (H(X_1(S_1) + X_2(S_2) + X_3(S_3) - \Gamma))(C).$$

Translaţia Γ are componentele C_1, C_2, C_3, deci $-\Gamma$[1] are componentele $-C_1$, $-C_2$, $-C_3$ şi avem:

$$P' = (H[(X_1 - C_1)(S_1) + (X_2 - C_2)(S_2) +$$
$$+ (X_3 - C_3)(S_3)]H^{-1})(C),$$

deoarece $C = H^{-1}(C)$.

Dacă U este translaţia care duce punctul C în punctul O, centrul omotetiilor din corpul C, avem:

$$H' = UHU^{-1} \in C$$

[1] $-\Gamma$ este altă notaţie pentru Γ^{-1}.

şi oricare ar fi translaţia T, avem:

$$H'(T) = UHU^{-1} \cdot T \cdot (UHU^{-1})^{-1} = UH \cdot U^{-1}TU \cdot H^{-1}U^{-1}.$$

Dar, T, U fiind translaţii, avem $U^{-1}TU = U^{-1}U \cdot T = T$ şi rezultă $H'(T) = U \cdot HTH^{-1} \cdot U^{-1}$; dar HTH^{-1} este tot o translaţie şi permutînd cu U, rezultă:

$$H'(T) = HTH^{-1} = H(T).$$

Aplicînd această formulă translaţiei $T = (X_1 - C_1)(S_1) + (X_2 - C_2)(S_2) + (X_3 - C_3)(S_3)$, relaţia obţinută mai sus devine, ţinînd seamă că $C = \Gamma(\Omega)$,

$$P' = (H'[(X_1 - C_1)(S_1) + (X_2 - C_2)(S_2) +$$
$$+ (X_3 - C_3)(S_3)])(C) = (H'(X_1 - C_1))(S_1) +$$
$$+ (H'(X_2 - C_2))(S_2) + (H'(X_3 - C_3))(S_3) + \Gamma)(\Omega)$$

şi rezultă relaţiile, ţinînd seamă că translaţia Γ are componentele C_1, C_2, C_3

$$X_1' = H'(X_1 - C_1) + C_1, \quad X_2' = H'(X_2 - C_2) + C_2,$$
$$X_3' = H'(X_3 - C_3) + C_3$$

care dau expresia analitică a unei omotetii de centru $C(C_1, C_2, C_3)$.

§ 5. ECUAŢIA PLANULUI

Fie $\Omega A_1A_2A_3$ un sistem de coordonate carteziene în spaţiul afin. Am văzut că planele definite de cîte două dintre axele de coordonate sînt date de ecuaţiile:

$$\Omega A_1A_2 : X_3 = 0,$$
$$\Omega A_2A_3 : X_1 = 0,$$
$$\Omega A_3A_1 : X_2 = 0.$$

Să presupunem acum că avem un plan α paralel cu planul ΩA_2A_3 (fig. 91). Planul α interesectează axa ΩA_1 într-un punct P_1. Planul paralel cu ΩA_2A_3 dus printr-un punct oarecare P al planului α coincide cu α, deci intersectează axa ΩA_1 în punctul P_1. Rezultă că punctele P din planul α cu aceeaşi coordonată X_1 anume raportul

translațiilor T_1, S_1 definite de vectorii ficși $\overrightarrow{OP_1}$ respectiv $\overrightarrow{OA_1}$. Notînd cu $H_1 \in C$ acest raport avem deci pentru punctele planului α,

$$X_1 = H_1, \quad (H_1(A_1) = P_1) \tag{55}$$

Reciproc, dacă un punct P din spațiu are coordonata $X_1 = H_1$, atunci planul α' paralel cu $\Omega A_2 A_3$ și trecînd prin P trece și prin $P_1 = H_1(A_1)$, deci coincide cu planul α și rezultă $P \in \alpha$. Deci ecuația (55) caracterizează punctele planului α și o vom numi *ecuația planului* α.

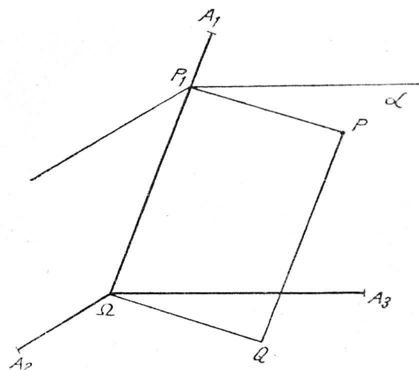


Fig. 91

Să considerăm acum un plan α oarecare. El nu poate fi paralel sau să conțină fiecare dintre axele de coordonate, deoarece aceste axe nu sînt coplanare. Să presupunem că planul α nu este paralel cu axa ΩA_3 și că nu conține această axă. Atunci α va întîlni axa ΩA_3 într-un punct M (fig. 92). Planul α este diferit de planele $\Omega A_1 A_3$, $\Omega A_2 A_3$, deci el va intersecta aceste plane după dreptele d_1, d_2, care trec prin punctul M. Fie M_1 un punct al dreptei d_1, diferit de M, și M_2 un punct al dreptei d_2, diferit și el de M. Să notăm:

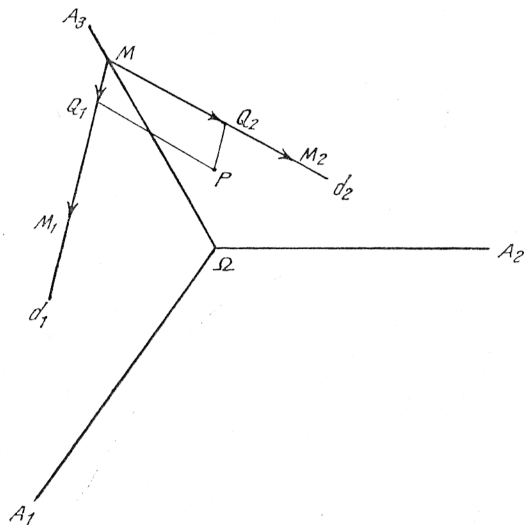


Fig. 92

$$u_1 = \overrightarrow{MM_1}, \quad u_2 = \overrightarrow{MM_2};$$

u_1 u_2 fiind vectori în planele $\Omega A_1 A_3$, $\Omega A_2 A_3$, translațiile U_1, U_2 definite de u_1 și u_2 sînt de forma:

$$U_1 = L_1(S_1) + H_1(S_3),$$
$$U_2 = L_2(S_2) + H_2(S_3).$$

Dacă P este un punct oarecare în planul α, ducînd prin P paralelele PQ_1, PQ_2 la dreptele d_1, d_2, obținem vectorii $\overrightarrow{MQ_1}$, $\overrightarrow{MQ_2}$ care definesc translațiile V_1, V_2 paralele cu U_1, respectiv U_2, deci de forma:

$$V_1 = Y_1(U_1) = (Y_1L_1)(S_1) + (Y_1H_1)(S_3),$$
$$V_2 = Y_2(U_2) = (Y_2L_2)(S_2) + (Y_2H_2)(S_3),$$

unde Y_1, Y_2 sînt elemente din corpul C, care depind de poziția punctului P în planul α și pot lua orice valori în corpul C. Considerînd translația $T_0 = H(S_3)$ definită de vectorul $\overrightarrow{\Omega M}$ și translația $T = X_1(S_1) + X_2(S_2) + X_3(S_3)$ definită de vectorul $\overrightarrow{\Omega P}$, avem:

$$T = T_0 + V_1 + V_2 =$$
$$= T_0 + (Y_1L_1)(S_1) + (Y_1H_1)(S_3) + (Y_2L_2)(S_2) + (Y_2H_2)(S_3).$$

Ținînd seama de expresiile translațiilor T_0, T și egalînd componentele translațiilor din cei doi membri ai ultimei egalități obținem relațiile:

$$X_1 = Y_1L_1, \quad X_2 = Y_2L_2, \quad X_3 = H + Y_1H_1 + Y_2H_2, \tag{56}$$

care definesc parametric planul α. Avem $L_1 \neq 0$, $L_2 \neq 0$; eliminînd parametrii Y_1, Y_2, obținem ecuația între coordonatele X_1, X_2, X_3 ale unui punct din planul α sub forma:

$$X_3 = H + X_1L_1^{-1}H_1 + X_2L_2^{-1}H_2, \tag{57}$$

care este o ecuație liniară în X_1, X_2, X_3, rezolvată în raport cu X_3.

Reciproc, se poate arăta că orice punct $P(X_1, X_2, X_3)$ ce verifică ecuația (57) aparține planului α. Într-adevăr, punînd $Y_1 = X_1L_1^{-1}$, $Y_2 = X_2L_2^{-1}$ și ținînd seama de (57), obținem ecuațiile (56), care spun că P se găsește în planul vectorilor u_1, u_2.

Să observăm de asemenea că orice ecuație liniară în X_1, X_2, X_3, fie

$$X_1P_1 + X_2P_2 + X_3P_3 + P_0 = 0, \tag{58}$$

care se poate rezolva în raport cu una din coordonatele X_1, X_2, X_3, deci care nu are toți coeficienții P_1, P_2, P_3 nuli, se poate aduce la forma (57) sau la o formă analogă, în care locul indicelui 3 este luat de 1 sau 2.

Rezultă că planele spațiului afin sînt date de ecuațiile liniare (58) cu P_1, P_2, P_3 nu toți nuli și că reciproc orice astfel de ecuație definește un plan.

Ținînd seama că prin orice dreaptă putem duce cel puțin două plane, rezultă că o dreaptă d este definită analitic de două ecuații liniare. Reciproc, orice sistem de două ecuații liniare independente, dacă are soluții, definește punctele comune a două plane neparalele, deci definește o dreaptă.

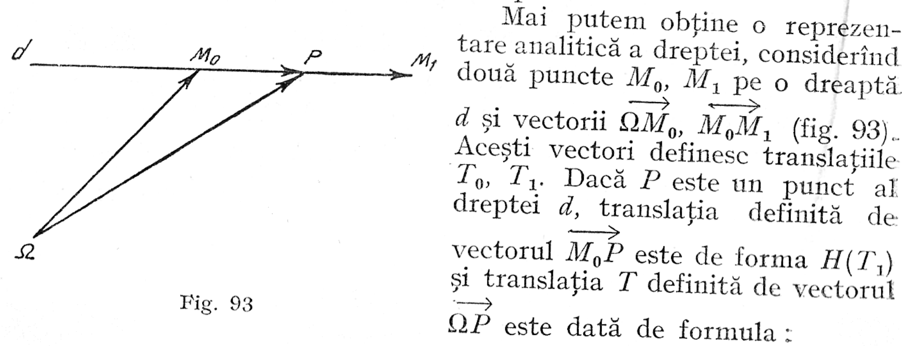


Fig. 93

Mai putem obține o reprezentare analitică a dreptei, considerînd două puncte M_0, M_1 pe o dreaptă d și vectorii $\overrightarrow{\Omega M_0}$, $\overrightarrow{M_0M_1}$ (fig. 93). Acești vectori definesc translațiile T_0, T_1. Dacă P este un punct al dreptei d, translația definită de vectorul $\overrightarrow{M_0P}$ este de forma $H(T_1)$ și translația T definită de vectorul $\overrightarrow{\Omega P}$ este dată de formula:

$$T = T_0 + H(T_1).$$

Presupunînd că avem

$$T_0 = Q_1(S_1) + Q_2(S_2) + Q_3(S_3),$$
$$T_1 = L_1(S_1) + L_2(S_2) + L_3(S_3),$$

obținem ecuațiile parametrice ale dreptei d sub forma:

$$X_1 = Q_1 + HL_1,\ X_2 = Q_2 + HL_2,\ X_3 = Q_3 + HL_3, \qquad (59)$$

H fiind parametru în corpul C, iar $Q_1, Q_2, Q_3, L_1, L_2, L_3$ constante în acest corp.

Dacă avem două drepte paralele d, d', putem alege pe dreapta d' ca vector $\overrightarrow{M_0M_1'}$ un vector echipolent cu $\overrightarrow{M_0M_1}$ și obținem ecuațiile parametrice pentru d':

$$X_1 = Q_1' + HL_1,\ X_2 = Q_2' + HL_2,\ H_3 = Q_3' + HL_3.$$

Rezultă că L_1, L_2, L_3 sînt aceeași pentru două drepte paralele. Aceste cantități se numesc *parametri directori ai dreptelor d, d'*. Parametrii directori ai unei drepte sînt definiți pînă la înmulțirea la stînga cu un factor din corpul C, deoarece dacă alegem în locul punctelor M_0, M_1 pe dreapta d alte două puncte N_0, N_1, vectorul $\overrightarrow{N_0N_1}$ definește o translație U_1 și avem o relație de forma:

$$U_1 = H(T_1).$$

Deci componentele vectorului U_1 se obțin din componentele vectorului T_1 prin înmulțire la stînga cu factorul H.

Pentru ca dreapta (59) să aparțină planului (58), trebuie să avem pentru orice valoare a lui H,

$$(Q_1 + HL_1)P_1 + (Q_2 + HL_2)P_2 + (Q_3 + HL_3)P_3 + P_0 = 0. \quad (60)$$

Rezultă ecuațiile:

$$Q_1P_1 + Q_2P_2 + Q_3P_3 + P_0 = 0,$$
$$L_1P_1 + L_2P_2 + L_3P_3 = 0.$$

Prima dintre aceste ecuații ne spune că punctul M_0 de coordonate Q_1, Q_2, Q_3 aparține planului (58), iar a doua constituie o relație între coeficienții lui X_1, X_2, X_3 din ecuația planului și între parametrii dreptei (59).

Să căutăm acum condiția ca dreapta (59) să fie paralelă cu planul (58). În acest caz ecuația (60) n-are soluție în H, deci avem:

$$Q_1P_1 + Q_2P_2 + Q_3P_3 + P_0 \neq 0,$$
$$L_1P_1 + L_2P_2 + L_3P_3 = 0.$$

De exemplu, axa ΩA_3 are parametrii 0, 0, 1 și rezultă că dacă planul (58) este paralel cu axa ΩA_3, avem $P_3 = 0$, deci ecuația unui plan paralel cu axa ΩA_3 este de forma:

$$X_1P_1 + X_2P_2 + P_0 = 0,$$

și trebuie să avem $P_0 \neq 0$ pentru ca acest plan să nu conțină originea Ω, deci nici axa ΩA_3.

Să considerăm acum un plan

$$X_1P_1' + X_2P_2' + X_3P_3' + P_0' = 0 \qquad (61)$$

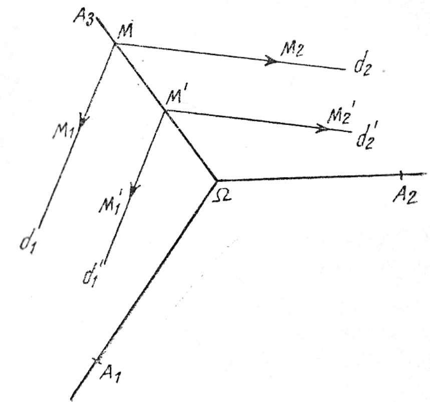


Fig. 94

și să căutăm condiția ca planele (58), (61) să fie paralele. Presupunem că aceste plane nu sînt paralele cu axa ΩA_3 și că nu conțin această axă. Atunci ele vor intersecta planul ΩA_1A_3 după dreptele paralele d_1, d_1' și planul ΩA_2A_3 după dreptele paralele d_2, d_2' (fig. 94). Luînd vectorii

$$\overrightarrow{MM_1} \sim \overrightarrow{M'M_1'},\ \overrightarrow{MM_2} \sim \overrightarrow{M'M_2'},$$

vom avea ecuaţia (57) pentru primul plan şi o ecuaţie analogă

$$X_3 = H' + X_1L_1^{-1}H_1 + X_2L_2^{-1}H_2, \qquad (62)$$

cu aceleaşi elemente L_1, H_1, L_2, H_2 pentru al doilea plan. Rezultă că dacă ecuaţiile (57), (58) pe de o parte şi (61), (62) pe de alta reprezintă două plane paralele, atunci avem:

$$P_1P_3^{-1} = P'_1P'^{-1}_3, \quad P_2P_3^{-1} = P'_2P'^{-1}_3.$$

Punînd $P'_3 = P_3K$, rezultă:

$$P'_1 = P_1P_3^{-1}P'_3 = P_1K, \quad P'_2 = P_2K,$$

deci dacă ecuaţiile (58), (61) reprezintă plane paralele, atunci coeficienţii P'_1, P'_2, P'_3 se obţin din P_1, P_2, P_3, înmulţindu-i la dreapta cu acelaşi element K din corpul C.

Dacă ecuaţiile (58), (61) reprezintă acelaşi plan, aducîndu-le la formele (57), (62) rezultă:

$$P_1P_3^{-1} = P'_1P'^{-1}_3, \quad P_2P_3^{-1} = P'_2P'^{-1}_3, \quad P_0P_3^{-1} = P'_0P'^{-1}_3$$

şi punînd ca mai sus $P'_3 = P_3K$, rezultă:

$$P'_0 = P_0K, \quad P'_1 = P_1K, \quad P'_2 = P_2K, \quad P'_3 = P_3K.$$

Reciproc, dacă coeficienţii ecuaţiilor a două plane sînt legaţi prin relaţii de această formă, atunci cele două plane coincid, fiind date de o aceeaşi ecuaţie (57).

Transformări de coordonate carteziene. Fie $\Omega A_1A_2A_3$, $\Omega' A'_1A'_2A'_3$ două sisteme de coordonate carteziene, (fig. 95). S_1, S_2, S_3, S'_1, S'_2, S'_3 translaţiile unitare ale axelor acestor sisteme, P un punct din spaţiu, T translaţia care duce Ω în P, T' translaţia care duce Ω' în P, U translaţia care duce pe Ω în Ω'. Deci avem:

$$T(\Omega) = P, \quad T'(\Omega') = P, \quad U(\Omega) = \Omega', \quad T = T' + U. \qquad (63)$$

Fie apoi X_1, X_2, X_3 coordonatele lui P în raport cu primul sistem şi X'_1, X'_2, X'_3 coordonatele lui P în raport cu al doilea sistem de coordonate. Avem atunci formulele:

$$T = X_1(S_1) + X_2(S_2) + X_3(S_3), \qquad (64)$$

$$T' = X'_1(S'_1) + X'_2(S'_2) + X'_3(S'_3). \qquad (65)$$

Să exprimăm acum translaţiile S'_1, S'_2, S'_3 cu ajutorul translaţiilor S_1, S_2, S_3. Notînd cu C_{1i}, C_{2i}, C_{3i} componentele translaţiei S'_i, ($i = 1, 2, 3$) în raport cu sistemul $\Omega A_1A_2A_3$ vom avea formulele:

$$S'_i = C_{1i}(S_1) + C_{2i}(S_2) + C_{3i}(S_3), \quad (i = 1, 2, 3).$$

Înlocuind în (65), ultima formulă (63) şi formula (64) dau, egalînd componentele relative la aceeaşi axă şi punînd $U = C_1(S_1) + C_2(S_2) + C_3(S_3)$,

$$X_i = C_i + X'_1C_{i1} + X'_2C_{i2} + X'_3C_{i3}, \quad (i = 1, 2, 3). \qquad (66)$$

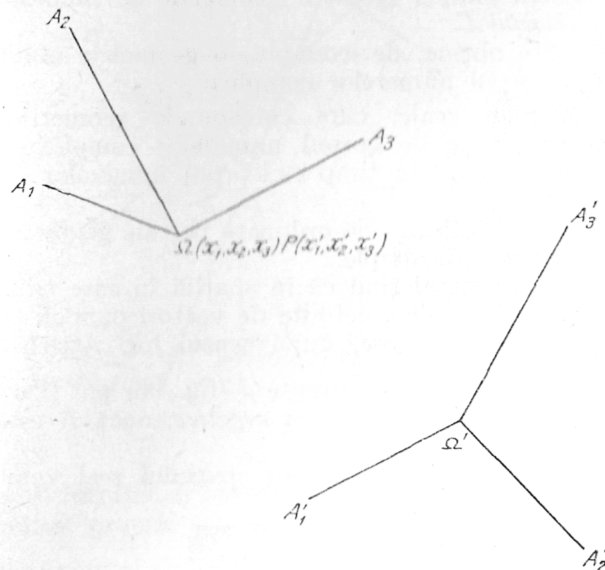


Fig. 95

Formulele (66) arată cum se transformă coordonatele unui punct din spaţiu cînd schimbăm sistemul de coordonate. Schimbînd rolurile celor două sisteme, obţinem formule de forma:

$$X'_i = C'_i + X_1C'_{i1} + X_2C'_{i2} + X_3C'_{i3}, \quad (i = 1, 2, 3), \qquad (67)$$

unde C'_{1i}, C'_{2i}, C'_{3i} sînt componentele translaţiei S_i în raport cu sistemul $\Omega' A'_1A'_2A'_3$, iar C'_i sînt componentele translaţiei care duce pe Ω' în Ω, în raport cu acelaşi sistem.

Ordonarea translațiilor spațiului afin. Axiomele spațiului afin ne-au condus la construcția unui corp C și la sisteme de coordonate în care planele sînt definite de ecuații liniare, iar dreptele sînt definite de sisteme de cîte două ecuații liniare. Aceste axiome nu pot caracteriza corpul C, deoarece oricare ar fi corpul C, chiar necomutativ, dacă definim punctele prin sisteme de trei elemente (X_1, X_2, X_3) din corpul C, planele prin ecuații liniare în X_1, X_2, X_3 și dreptele ca intersecții de cîte două plane, obținem o geometrie care verifică axiomele geometriei afine. Această geometrie se numește *geometria analitică peste corpul C*.

Astfel se poate obține, de exemplu, o geometrie afină complexă luînd pentru C corpul numerelor complexe.

Corpul numerelor reale, care corespunde geometriei spațiului euclidian, se deosebește de corpul numerelor complexe prin aceea că este un corp *ordonat*, în timp ce corpul numerelor complexe nu poate fi ordonat.

Putem ajunge la noțiunea de ordonare pe cale geometrică, plecînd de la anumite observații simple.

Să observăm în primul rînd că în spațiul în care trăim, translațiile avînd direcția dată, deci definite de vectori paraleli cu *o dreaptă dată*, se împart în două clase, după sensul lor. Astfel, translațiile definite de vectorii $\overrightarrow{AB}$ ai unei drepte d (fig. 96) pot fi numite *pozitive* dacă B este la dreapta lui A și *negative*, dacă B este la stînga lui A.

În legătură cu sensul translațiilor spațiului real vom desprinde următoarele proprietăți:

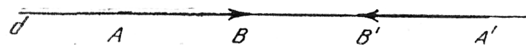


Fig. 96

Axiomele ordonării translațiilor. Mulțimea translațiilor nenule avînd o direcție dată (definite de vectorii ce au același suport) se împart în două clase, astfel încît:

1. Vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $(A \neq B)$ definesc translații din clase diferite (de sensuri opuse).

2. Dacă translațiile T_1, T_2 au același sens, $T_1 + T_2$ nu este nulă și are același sens cu T_1 și T_2.

3. Dacă translațiile T_1, T_2 au același sens, atunci, oricare ar fi omotetia nenulă H, translațiile

$$H(T_1) = HT_1H^{-1}, \quad H(T_2) = HT_2H^{-1}$$

au de asemenea același sens.

4. Dacă $H(T)$, T au același sens pentru o translație T, atunci $H(T')$ și T' au același sens pentru orice translație T'.

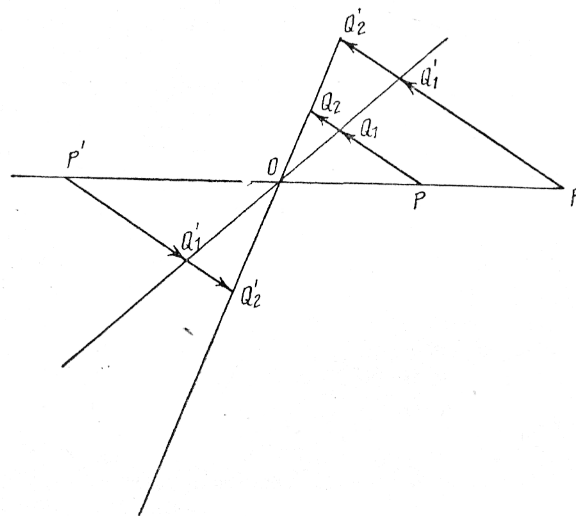


Fig. 97

Caracterul intuitiv al proprietății 2 este clar. Pentru a da o justificare intuitivă proprietății 3, să observăm că dacă translațiile T_1, T_2 au același sens și sînt definite de vectorii $\overrightarrow{PQ_1}$, $\overrightarrow{PQ_2}$, și dacă omotetia H are centrul în O, atunci translațiile $H(T_1)$, $H(T_2)$ vor fi definite de vectorii

$$\overrightarrow{P'Q'_1}, \quad \overrightarrow{P'Q'_2} \text{ unde } P' = H(P), \quad Q'_1 = H(Q_1), \quad Q'_2 = H(Q_2).$$

Figura 97 reprezintă două omotetii, una care păstrează sensurile pe dreptele OP, OQ_1, OQ_2 și a doua care schimbă aceste sensuri. În ambele cazuri vectorii $\overrightarrow{P'Q'_1}$, $\overrightarrow{P'Q'_2}$ au același sens.

Axioma 4 este de asemenea intuitivă. Presupunînd translația T definită de vectorul $\overrightarrow{OA}$ și presupunînd că $A' = H(A)$ este astfel încît vectorii $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OA'}$ au același sens, fig. 98 arată că vectorii $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OB'}$, $(B' = H(B))$ nu pot avea sensuri opuse, avînd $AB \| A'B'$.

Vom folosi notația $T \approx T'$ pentru a exprima că translațiile T, T' au aceeași direcție și același sens și vom citi: T, T' au același sens. Dacă T, T' nu au același sens, vom scrie $T \not\approx T'$.

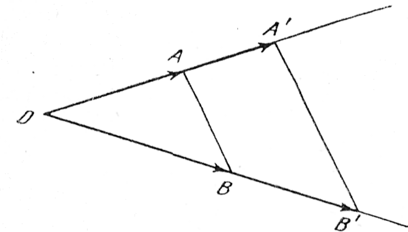


Fig. 98

Din axioma 2 rezultă că dacă translația T nu este nulă, atunci translațiile

$$2T = T + T,$$

$$3T = T + T + T, \ldots$$

nu sînt nule și au același sens cu T.

Axiomele 3, 4 ne permit să distingem în corpul C al omotetiilor de centru dat O, elementele pozitive și elementele negative. Vom spune că omotetia H este *pozitivă* (în scris: $H > 0$) dacă pentru o translație T nenulă avem $H(T) \approx T$. În cazul contrar, deci cînd

$$H(T) \not\approx T,$$

vom spune că H este o omotetie *negativă*.

Axioma 4 arată că împărțirea elementelor nenule din C în elemente pozitive și negative nu depinde de translația T.

T e o r e m a 1. *Împărțirea elementelor nenule din C în elemente pozitive și negative are următoarele proprietăți:*

1. *Dacă $H > 0$, atunci avem $-H < 0$ și din $H < 0$ rezultă $-H > 0$.*

2. *Dacă $H_1 > 0$ și $H_2 > 0$, atunci avem $H_1 + H_2 > 0$, $H_1H_2 > 0$.*

Fie T translația definită de un vector $\overrightarrow{OA}$, $(O \neq A)$ și fie $A' = H(A)$. Atunci $H(T)$ este definită de vectorul $\overrightarrow{OA'}$.

Dacă $H > 0$, avem $H(T) \approx T$. Fie A'' (fig. 99) punctul pentru care avem

$$\overrightarrow{OA''} \sim \overrightarrow{A'O}.$$

Atunci avem $(-H)\ (A) = A''$ și deci translația $(-H)\ (T)$ este definită de vectorul $\overrightarrow{OA''}$ sau de vectorul echipolent cu el, $\overrightarrow{A'O}$. Din axioma 1 rezultă:

$$(-H)\ (T) \not\approx H(T).$$

Din $H(T) \approx T$ rezultă că avem:

$$(-H)\ (T) \not\approx T,$$

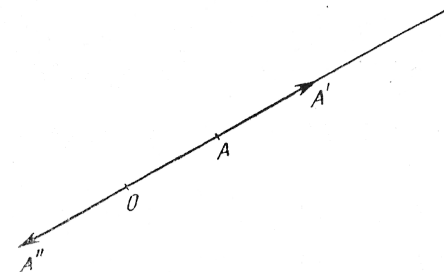


Fig. 99

și deci $-H < 0$. La fel se arată că dacă $H(T) \not\approx T$, atunci $(-H)\ (T) \approx T$, deci din $H < 0$ rezultă $-H > 0$.

Fie H_1, H_2 două omotetii pozitive, T o translație definită de vectorul nenul $\overrightarrow{OA}$ și fie $A_1 = H_1(A)$, $A_2 = H_2(A)$. Translația $H_1(T)$ este definită de vectorul $\overrightarrow{OA_1}$, $H_2(T)$ de vectorul $\overrightarrow{OA_2}$; $H_1 + H_2$ duce punctul A în $(H_1(T) + H_2(T))(O)$, deci $(H_1 + H_2)\ (T) = H_1(T) + H_2(T)$. Din $H_1 > 0$, $H_2 > 0$ rezultă $H_1(T) \not\approx T$, $H_2(T) \not\approx T$, deci $H_1(T) \approx H_2(T)$.

Din axioma 2 rezultă că avem:

$$H_1(T) + H_2(T) \approx H_1(T) \approx T, \text{ deci } (H_1 + H_2)(T) \approx T,$$

deci avem $H_1 + H_2 > 0$.

Cu aceleași ipoteze $H_1 > 0$, $H_2 > 0$, $T \neq 0$, avem:

$$H_1(H_2(T)) \approx H_2(T) \approx T,$$

deci $H_1H_2 > 0$.

Un corp care verifică proprietățile teoremei 1 se numește *ordonat*. Am arătat deci că *dacă spațiul afin verifică axiomele ordonării translațiilor, atunci corpul coordonatelor este ordonat.*

Într-un corp ordonat C, oricare elemente distincte se pot compara, punînd :

$$H' > H \text{ dacă } H' - H > 0.$$

Dacă avem $H - H' > 0$, atunci $H' - H = -(H - H') < 0$. De aceea vom scrie uneori $H < H'$ în loc de $H' > H$. Fie $H' < H$ şi H'' un element oarecare al corpului C. Avem : $(H + H'') - (H' + H'') = H - H' > 0$, deci

$$H' + H'' < H + H'',$$

deci *adunarea cu acelaşi element H'' nu schimbă ordonarea elementelor H, H'*.

Fie acum $H' < H$ şi $H'' > 0$. Atunci avem, după proprietatea 2 a corpurilor ordonate

$$HH'' - H'H'' = (H - H')H'' > 0$$

$$H''H - H''H' = H''(H - H') > 0,$$

deci :

$$HH'' > H'H'', \; H''H > H''H',$$

prin urmare, *înmulţirea cu acelaşi factor pozitiv, fie la dreapta, fie la stînga, a două elemente din C, nu schimbă ordonarea acestor elemente.*

Din relaţia $\mathcal{I} = \mathcal{I}\mathcal{I} = (-\mathcal{I})(-\mathcal{I})$ rezultă $\mathcal{I} > 0$.

Într-adevăr, dacă am avea $\mathcal{I} < 0$, din proprietatea 1 a corpurilor ordonate rezultă $-\mathcal{I} > 0$ şi din proprietatea a doua rezultă $(-\mathcal{I})(-\mathcal{I}) > 0$, deci $\mathcal{I} > 0$, ceea ce constituie o contradicţie.

În acelaşi mod se arată că pentru orice element $a \neq 0$ din corpul ordonat C, avem $a^2 > 0$. De aici rezultă că nu se poate ordona corpul numerelor complexe, unde avem $i^2 = -1 < 0$.

În orice corp ordonat avem, notînd cu $\mathcal{I}$ elementul unitate,

$$0 < \mathcal{I} < \mathcal{I} + \mathcal{I} < \mathcal{I} + \mathcal{I} + \mathcal{I} < \ldots$$

deoarece $(\mathcal{I} + \mathcal{I}) - \mathcal{I} = \mathcal{I} > 0$, $(\mathcal{I} + \mathcal{I} + \mathcal{I}) - (\mathcal{I} + \mathcal{I}) = \mathcal{I} > 0$ etc.

Rezultă că orice corp ordonat C conţine elementele, pozitive şi distincte, două cîte două.

$$\mathcal{I}, 2\mathcal{I} = \mathcal{I} + \mathcal{I}, 3\mathcal{I} = \mathcal{I} + \mathcal{I} + \mathcal{I}, \ldots$$

De asemenea, corpul C conţine inversele acestor elemente, care se notează :

$$\mathcal{I}, \frac{\mathcal{I}}{2}, \frac{\mathcal{I}}{3}, \frac{\mathcal{I}}{4}, \ldots$$

şi, în general, conţine toţi multiplii raţionali $\frac{m\mathcal{I}}{n}$, pozitivi sau negativi, ai lui $\mathcal{I}$, şi avem $\frac{m\mathcal{I}}{n} = m(n\,\mathcal{I})^{-1}$.

Cel mai simplu exemplu de corp ordonat îl constituie corpul numerelor raţionale. Orice alt corp ordonat C conţine acest corp (mai corect, C conţine un corp izomorf cu corpul numerelor raţionale). Fiind date două translaţii T, T', vom scrie :

$$T > T'$$

dacă avem $T \neq 0$, $T' \neq 0$, $T \approx T'$ şi

$$\frac{T}{T'} > \mathcal{I} \left(\text{sau } \frac{T'}{T} < \mathcal{I}\right);$$

deci dacă $T > T'$, atunci translaţiile T, T' au acelaşi sens şi omotetia care transformă translaţia T' în T este mai mare decît $\mathcal{I}$, în sensul ordonării corpului C.

Din proprietăţile ordonării corpului C rezultă :

T e o r e m a 2. *Din relaţiile $T > T'$, $T' > T''$ rezultă $T > T''$, iar din relaţiile $T_1 > T_1'$, $T_2 > T_2'$, $T_1 \approx T_2$ rezultă $T_1 + T_2 > T_1' + T_2'$.*

Într-adevăr, din primele ipoteze rezultă :

$$T \approx T', \; T' \approx T'', \frac{T}{T'} > \mathcal{I}, \; \frac{T'}{T''} > \mathcal{I}$$

şi avem deci $T \approx T'$ şi

$$\frac{T}{T''} = \frac{T}{T'}\frac{T'}{T''} > \frac{T}{T'}\mathcal{I} > \mathcal{I}\mathcal{I} = \mathcal{I},$$

deci $T > T''$.

Pentru translaţiile T_1, T_2, T_1', T_2', ipotezele dau

$$T_1 \approx T_1' \approx T_2 \approx T_2', \; \frac{T_1}{T_1'} > \mathcal{I}, \; \frac{T_2}{T_2'} > \mathcal{I}.$$

Punînd $\frac{T'_1}{T'_2} = H$, avem $H > \mathcal{O}$ şi

$$\frac{T_1}{T'_2} = \frac{T_1}{T'_1}\frac{T'_1}{T'_2} = \frac{T_1}{T'_1}H > \mathcal{I}H = H, \quad \frac{T_2}{T'_2} > \mathcal{I}.$$

Rezultă:

$$\frac{T_1}{T'_2} + \frac{T_2}{T'_2} > H + \mathcal{I}.$$

Cum omotetiile operează distributiv faţă de adunare în spaţiul translaţiilor, rezultă că omotetia $\frac{T_1}{T'_2} + \frac{T_2}{T'_2}$ transformă translaţia T'_2 în

$$\left(\frac{T_1}{T'_2} + \frac{T_2}{T'_2}\right)(T'_2) = \frac{T_1}{T'_2}(T'_2) + \frac{T_2}{T'_2}(T'_2) = T_1 + T_2,$$

deci avem:

$$\frac{T_1}{T'_2} + \frac{T_2}{T'_2} = \frac{T_1 + T_2}{T'_2}$$

şi am arătat astfel că avem:

$$\frac{T_1 + T_2}{T'_2} > H + \mathcal{I}.$$

De aici rezultă:

$$\frac{T_1 + T_2}{T'_1 + T'_2} = \frac{T_1 + T_2}{T'_2}\frac{T'_2}{T'_1 + T'_2} = \frac{T_1 + T_2}{T'_2}\left(\frac{T'_1 + T'_2}{T'_2}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{T_1 + T_2}{T'_2}\left(\frac{T'_1}{T'_2} + \frac{T'_2}{T'_2}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{T_1 + T_2}{T'_2}(H + \mathcal{I})^{-1} > (H + \mathcal{I})(H + \mathcal{I})^{-1} = \mathcal{I},$$

deci avem:

$$T_1 + T_2 > T'_1 + T'_2.$$

§ 7. CONTINUITATEA SPAŢIULUI AFIN

Fie pe o dreaptă d doi vectori nenuli de acelaşi sens $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OA'}$, şi fie T, T' translaţiile definite de aceşti vectori. Experienţa ne arată că dacă $T > T'$, aplicînd de un număr suficient de mare de ori translaţia T' punctului O, putem depăşi punctul A. Acest fapt constituie

principiul sau *axioma lui Arhimede* şi se poate enunţa sub forma: *Fiind date două translaţii de acelaşi sens* $T > T'$, *există un număr natural* n, *astfel ca* $nT' > T$.

Această propoziţie nu se poate demonstra cu ajutorul axiomelor introduse pînă acum. Vom studia aici consecinţele ei.

În primul rînd, fiind date translaţiile T, T' cu $T \approx T'$, să notăm cu n cel mai mic număr natural, pentru care avem:

$$nT' > T. \tag{68}$$

În acest caz, vom avea:

$$(n-1)T' \leqslant T, \tag{69}$$

deci:

$$H = \frac{T}{(n-1)T'} \geqslant \mathcal{I}. \tag{69'}$$

Din formula (69′) rezultă $H - \mathcal{I} \geqslant \mathcal{O}$, deci dacă $H \neq \mathcal{I}$, sau $T \neq (n-1)T'$, avem

$$T \approx T' \approx (H - \mathcal{I})\ ((n-1)T') =$$

$$= H((n-1)T') - \mathcal{I}(n-1)T' = T - (n-1)T'.$$

Să notăm cu R translaţia

$$R = T - (n-1)T'. \tag{70}$$

Am arătat că avem:

$$R \approx T \approx T'. \tag{71}$$

Pe de altă parte, avem:

$$\frac{R}{T'} = \frac{T - (n-1)T'}{T'} = \frac{T - nT' + T'}{T'} = \frac{T - nT'}{T'} + \mathcal{I} =$$

$$= \frac{T - nT'}{T}\frac{T}{T'} + \mathcal{I} = \left(\mathcal{I} - \frac{nT'}{T}\right)\frac{T}{T'} + \mathcal{I}.$$

Din (68) rezultă însă $\frac{nT'}{T} > \mathcal{I}$, deci avem:

$$\mathcal{I} - \frac{nT'}{T} < \mathcal{O},$$

și cum $\frac{T}{T'} > \mathcal{O}$, rezultă $\frac{R}{T'} < \mathcal{J}$, deci:

$$R < T'. \tag{72}$$

Dacă $H = \mathcal{J}$, avem $T = (n-1)\,T'$ și $R = 0$.

Din principiul lui Arhimede rezultă deci:

T e o r e m a 3. *Fiind date translațiile T, T' astfel ca $T \approx T'$, există un număr natural n și o translație R, astfel încît să avem relațiile:*

$$T = (n-1)T' + R, \quad R < T' \text{ sau } R = 0. \tag{73}$$

În loc să spunem că are loc una din relațiile $R < T'$ sau $R = 0$, vom spune mai simplu că avem $0 \leqslant R < T'$. R se numește *restul* măsurării translației T prin translația T' și se spune că T' intră de $(n-1)$ ori în translația T.

Aplicînd formula (73) de mai multe ori, obținem relații de forma:

$$R = p_1 \frac{T'}{10} + R_1, \quad 0 \leqslant R_1 < \frac{T'}{10}, \quad 0 \leqslant p_1 < 10$$

$$R_1 = p_2 \frac{T'}{100} + R_2, \quad 0 \leqslant R_2 < \frac{T'}{100}, \quad 0 \leqslant p_2 < 10$$

. . . .

. . . .

și măsurarea translației T prin translațiile T', $\frac{T'}{10}$, $\frac{T'}{100}$, ... va conduce la un simbol de forma:

$$T : T' = (n-1) + \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{100} + \ldots + \frac{p_m}{10^m} + \ldots,$$

$p_1, p_2, \ldots, p_m, \ldots$ fiind numere întregi de la 0 la 9 inclusiv.

Simbolul $T : T'$ se numește *numărul zecimal care măsoară translația T prin translația T'*. Numerele $p_1, p_2, \ldots, p_m, \ldots$ sînt legate de T, T' prin următoarea proprietate: oricare ar fi numărul natural m, avem o relație de forma:

$$T = \left[(n-1) + \frac{p_1}{10} + \ldots + \frac{p_m}{10^m}\right] T' + R_m,$$

unde:

$$0 \leqslant R_m < \frac{T'}{10^m}.$$

De aici rezultă că nu există m, astfel încît să avem $p_m = 9$ pentru orice $r > m$.

Într-adevăr, dacă ar exista m cu această proprietate, notînd

$$S = \left[(n-1) + \frac{p_1}{10} + \ldots + \frac{p_m + 1}{10^m}\right] T',$$

am avea pentru orice $r > m$,

$$S - T = \left[\frac{1}{10^m} - 9\left(\frac{1}{10^{m+1}} + \ldots + \frac{1}{10^r}\right)\right] T' - R_r = \frac{1}{10^r} T' - R_r$$

și rezultă din $R_r < \frac{T'}{10^r}$ că avem: $S > T$ și

$$S - T < \frac{T'}{10^r}.$$

În acest caz, translațiile $S - T$ și T' ar contrazice principiul ui Arhimede.

T e o r e m a 4 (*Hilbert*). *Dacă se admite axioma lui Arhimede, înmulțirea în corpul C este comutativă.*

Fie H, H' două omotetii pozitive din corpul C. Să presupunem că avem $HH' \neq H'H$. Schimbînd eventual rolul lui H cu al lui H', putem presupune că avem:

$$HH' - H'H > \mathcal{O}. \tag{74}$$

Fie T_0 o translație nenulă arbitrară și fie

$$T_n = \frac{T_0}{n}, \quad T = H(T_0), \quad T' = H'(T_0), \tag{75}$$

n fiind un număr natural.

Aplicînd teorema 3, găsim, pentru fiecare n, două numere naturale p_n, p'_n astfel încît să avem:

$$\begin{gathered} T = p_n T_n + R_n, \quad T' = p'_n T_n + R'_n, \\ 0 \leqslant R_n < T_n, \quad 0 \leqslant R'_n < T_n. \end{gathered} \tag{76}$$

Din formulele (75) rezultă:

$$(HH')(T_0) = H(H'(T_0)) = H(T') = p'_n H(T_n) + H(R'_n),$$

$$(H'H)(T_0) = H'(H(T_0)) = H'(T) = p_n H'(T_n) + H'(R_n).$$

Dar, pe de altă parte, avem:

$$H(T_n) = H\left(\frac{T_0}{n}\right) = \frac{1}{n} H(T_0) = \frac{1}{n} T,$$

$$H'(T_n) = H'\left(\frac{T_0}{n}\right) = \frac{1}{n} T',$$

deci avem

$$H(R'_n) < H(T_n) = \frac{1}{n} T, \quad H'(R_n) < H'(T_n) = \frac{1}{n} T'$$

şi

$$(HH' - H'H)\,(T_0) \leqslant \frac{p'_n T - p_n T'}{n} + \frac{1}{n}(T + T').$$

Înlocuind T, T' prin expresiile (76), rezultă:

$$(HH' - H'H)(T_0) \leqslant \frac{p'_n R_n - p_n R'_n}{n} + \frac{1}{n}(T + T') \leqslant$$

$$\leqslant \frac{p'_n + p_n}{n^2} T_0 + \frac{1}{n}(T + T').$$

Deci translaţia $T^* = (HH' - H'H)\,(T_0)$ verifică inegalitatea

$$T^* \leqslant \frac{1}{n}\left(\frac{p'_n + p_n}{n} T_0 + T + T'\right), \quad (T^* \approx T_0). \tag{77}$$

Din formulele (76) rezultă însă:

$$\frac{p_n}{n} T_0 = T - R_n \leqslant T, \quad \frac{p'_n}{n} T_0 = T' - R'_n \leqslant T'$$

şi avem deci:

$$T^* \leqslant \frac{1}{n} U, \quad U = 2(T + T'). \tag{78}$$

Relaţia (78) a fost dedusă fără nici o restricţie pentru n. Rezultă că oricare ar fi n, avem $nT^* \leqslant U$, ceea ce contrazice principiul lui Arhimede.

Deci pentru orice două omotetii pozitive H, H' avem:

$$HH' = H'H.$$

Dacă H este negativă, $-H$ va fi pozitivă şi vom avea:

$$-HH' = (-H)\,H' = H'\,(-H) = -H'H,$$

3-2-33

deci $HH' = H'H$. La fel se arată că produsul a două omotetii negative este comutativ.

Teorema 4 se datoreşte lui Hilbert.

T e o r e m a 5. (*Teorema lui Tales*). *Dacă pentru translaţiile T, T', S, S' avem:*

$$T \approx T' \quad \frac{T}{T'} = \frac{S}{S'},$$

atunci avem şi

$$T : T' = S : S'.$$

Fie H omotetia $\frac{T}{T'} = \frac{S}{S'}$; avem atunci:

$$H(T') = T, \; H(S') = S.$$

Aplicînd perechilor de translaţii (T, T'), (S, S') teorema 3, putem scrie relaţii de forma:

$$T = (n - 1)T' + T_1, \; S = (m - 1)S' + S_1,$$

$$(T_1 < T', \; S_1 < S')$$

din care rezultă:

$$H = \frac{T}{T'} = (n - 1)\,\mathcal{J} + \frac{T_1}{T'} = (m - 1)\,\mathcal{J} + \frac{S_1}{S'},$$

$$\mathcal{O} \leqslant \frac{T_1}{T'} < \mathcal{J}, \; \mathcal{O} \leqslant \frac{S_1}{S'} < \mathcal{J}.$$

Din ultima relaţie rezultă $n = m$. Într-adevăr, dacă am avea $m \neq n$, de exemplu $m > n$, ar rezulta:

$$(m - n)\,\mathcal{J} = \frac{T_1}{T'} - \frac{S_1}{S'} < \mathcal{J},$$

ceea ce nu este posibil. Rezultă atunci şi $\frac{T_1}{T'} = \frac{S_1}{S'}$. Aplicînd acelaşi procedeu perechilor (T_1, T'_1), (S_1, S'_1), unde

$$T'_1 = \frac{T'}{10}, \; S'_1 = \frac{S'}{10},$$

obţinem relaţii de forma:

$$T_1 = p_1 T'_1 + T_2, \quad S_1 = p_1 S'_1 + S_2,$$

unde:

$$0 \leqslant T_2 < T_1', \quad 0 \leqslant S_2 < S_1', \frac{T_2}{T_1'} = \frac{S_2}{S_1'},$$

şi continuînd în acest mod, obţinem rezultatul că perechilor (T, T'), (S, S') li se asociază acelaşi număr zecimal, deci avem $T : T' = S : S'$.

Din teorema 5 rezultă că fiecărei omotetii pozitive H i se poate asocia un număr zecimal determinat $x(H)$, punînd:

$$x(H) = H(T) : T,$$

T fiind o translaţie nenulă oarecare. Pentru omotetiile H negative punem:

$$x(H) = -x(-H).$$

Se pune acum problema dacă orice număr zecimal x corespunde unei omotetii H. Exemplul geometriei analitice peste corpul numerelor raţionale arată că axiomele introduse pînă acum nu sînt suficiente pentru a se putea arăta că orice număr zecimal este de forma $x(H)$.

Pentru a verifica această proprietate, vom introduce.

Axioma lui Cantor-Dedekind. Fiind date un şir crescător de translaţii

$$T_1 < T_2 < \ldots < T_n < \ldots$$

şi un şir descrescător

$$S_1 > S_2 > \ldots > S_n > \ldots$$

astfel încît S_1, T_1 să aibă acelaşi sens şi astfel încît oricare ar fi numerele naturale n, m, să avem:

$$T_m < S_n,$$

există o translaţie U, astfel ca să avem:

$$T_m < U < S_m,$$

oricare ar fi m.

Să considerăm numărul zecimal

$$x = p_0 + \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{10^2} + \ldots + \frac{p_n}{10^n} + \ldots$$

$$(0 \leqslant p_i \leqslant 9)$$

şi să-i asociem şirurile de translaţii

$$S_n = \left(p_0 + \frac{p_1}{10} + \ldots + \frac{p_{n+1}}{10^n}\right) T_0,$$

$$T_n = \left(p_0 + \frac{p_1}{10^n} + \ldots + \frac{p_n}{10^n}\right) T_0,$$

T_0 fiind o translaţie fixă.

Aceste şiruri verifică condiţiile axiomei lui Cantor-Dedekind şi rezultă că există o translaţie U, astfel ca să avem:

$$T_m < U < S_m.$$

Se verifică imediat că avem $U : T_0 = x$.

Putem acum defini operaţiile cu numere zecimale punînd:

$$x(H_1) + x(H_2) = x(H_1 + H_2)$$

$$x(H_1)x(H_2) = x(H_1 \cdot H_2).$$

Se verifică uşor că aceste ecuaţii conduc la operaţiile elementare cu numere.

Spaţiul afin în care se verifică axiomele lui Arhimede şi Cantor-Dedekind se numeşte *spaţiul euclidian afin*[1].

Fiind dată o omotetie H şi o translaţie T, vom conveni să notăm cu xT translaţia $H(T)$, unde $x = x(H)$. Avem atunci proprietăţile:

$$x(x'T) = (xx')T, \ (x + x')T = xT + x'T, \ x(T + T') =$$
$$= xT + xT', \ 1T = T,$$

1 fiind numărul zecimal 1,00 ... 0....

§ 8. AUTOMORFISMELE SPAŢIULUI EUCLIDIAN AFIN

Am numit automorfism al spaţiului afin orice transformare biunivocă T a spaţiului pe el însuşi, care duce puncte coliniare în puncte coliniare. Transformarea fiind biunivocă, în sensul că orice punct al spaţiului este imaginea unui punct şi a unuia singur prin T.

---

[1] Axioma lui Cantor-Dedekind a avut un rol fundamental în dezvoltarea matematicii moderne şi este echivalentă cu admiterea existenţei numerelor zecimale. Această existenţă este asigurată în cadrul Teoriei mulţimilor ce are la bază o altă axiomă, numită axioma alegerii, sau a lui Zermelo. Această axiomă a dat naştere la discuţii cel puţin tot atît de vii ca şi axioma paralelelor, cu rezultate nu mai puţin importante. Aceste discuţii s-au încheiat, prin lucrarea matematicianului american Cohen. Acesta a arătat că există matematici în care axioma alegerii nu este îndeplinită, tot aşa cum există geometrii, în care axioma paralelelor este falsă. În aceste matematici, axioma lui Cantor-Dedekind poate fi contradictorie. Studiul acestor probleme face obiectul logicii matematice.

Teorema 1. *Automorfismele spațiului afin transformă puncte coplanare în puncte coplanare.*

Fie α un plan oarecare, d_1, d_2 (fig. 100) două drepte concurente în acest plan, P un punct oarecare al planului α și P', d_1', d_2' imaginile lui P, d_1, d_2 prin automorfismul θ. Dacă d_1, d_2 au punctul comun O, d_1', d_2' vor avea punctul comun $O' = \theta(O)$. Vom arăta că $P' = \theta(P)$ se găsește în planul α' definit de dreptele d_1', d_2'. Pentru aceasta, să observăm că prin P se poate duce o singură paralelă la dreapta d_1. Deci dacă alegem două puncte pe dreapta d_2, diferite de O, unul din aceste puncte, fie Q, va defini împreună cu punctul P o dreaptă δ ce intersectează și dreapta d_1 într-un punct R. Fie Q', R' imaginile punctelor Q, R prin automorfismul θ. Punctele P', Q', R' sînt coliniare, fiind imaginile a trei puncte coliniare. Dreapta $Q'R'$ avînd două puncte comune cu planul α' va aparține acestui plan și rezultă că P' este un punct al planului α'.

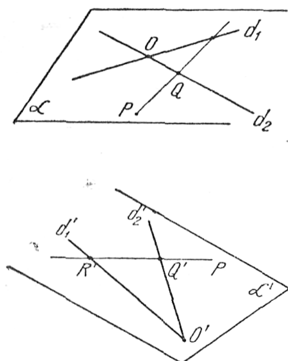


Fig. 100

Teorema 2. *Automorfismele duc puncte necoplanare în puncte necoplanare și puncte necoliniare în puncte necoliniare.*

Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare ale spațiului afin. Să presupunem că imaginile lor A', B', C', D' printr-un automorfism θ al spațiului afin se găsesc într-un plan α. Fie P un punct oarecare al spațiului.

Să ducem prin punctul P o dreaptă d ce nu întîlnește nici una din muchiile tetraedrului $ABCD$, deci care nu se găsește în nici unul din planele definite de P și de aceste muchii. Dreapta d nu poate fi paralelă cu trei din fețele tetraedrului $ABCD$, deoarece dacă d ar fi paralelă de exemplu cu fețele ce trec prin A, aceste fețe ar conține paralela d' dusă prin A la dreapta d. Rezultă că d' ar fi intersecția planelor ABC, ABD și a planelor ABC, ACD, deci A, B, C ar fi situate pe dreapta d', ceea ce nu este posibil. Să presupunem atunci că dreapta d intersectează fețele ABC, ABD în punctele M, respectiv N. Aceste puncte sînt distincte, deoarece d nu intersectează muchia AB. Dacă M', N' sînt imaginile punctelor M, N prin θ, M fiind coplanar cu A, B, C și N fiind coplanar cu A, B, D, rezultă că M', N' se găsesc în planul α. Dar P este coliniar cu M, N, deci P' este coliniar cu M', N' și se găsește în planul α. Deci am arătat că toate punctele spațiului se transformă în puncte ale planului α, ceea ce nu este posibil, deoarece θ este o aplicație biunivocă și orice punct al spațiului trebuie să fie imagine a unui punct P.

Aceasta arată că punctele A', B', C', D' nu pot fi coplanare.

Fie acum A, B, C trei puncte necoliniare. Punctele $A' = \theta(A)$, $B' = \theta(B)$, $C' = \theta(C)$ nu pot fi coliniare, deoarece dacă A', B', C' ar fi coliniare, atunci A', B', C' și imaginea P' a unui punct P oarecare ar fi coplanare. Or, dacă alegem pentru P un punct exterior planului ABC am contrazice proprietatea stabilită mai sus.

Teorema 3. *Un automorfism al spațiului afin transformă drepte concurente în drepte concurente și drepte paralele în drepte paralele.*

Fie d_1, d_2 două drepte concurente în punctul O. Imaginile lor prin automorfismul θ vor fi două drepte concurente în punctul $O' = \theta(O)$.

Fie acum d_1, d_2 două drepte paralele și d_1', d_2' imaginile lor prin θ. Dreptele d_1, d_2 sînt coplanare, deci d_1', d_2' au aceeași proprietate. Dreptele d_1', d_2' nu pot fi concurente, deoarece în caz contrar punctul lor de concurență P' ar fi imaginea unui punct P, ce nu poate aparține și dreptei d_1 și dreptei d_2. Dacă P este exterior dreptei d_1, el va fi necoliniar cu două puncte A, B ale dreptei d_1 și punctele necoliniare A, B, P ar avea imaginile, prin θ coliniare pe dreapta d_1', ceea ce nu este posibil. Deci $d_1' \parallel d_2'$.

Folosind teoremele precedente, vom determina analitic automorfismele spațiului afin.

Fie $\Omega A_1A_2A_3$ un sistem de coordonate carteziene și $\Omega'A_1'A_2'A_3'$ un al doilea sistem de același tip, astfel încît punctul Ω' să aibă față de primul sistem coordonatele C_1, C_2, C_3, iar translațiile unitare S_1', S_2', S_3' de-a lungul axelor $\Omega'A_1', \Omega'A_2', \Omega'A_3'$ să aibă, tot față de primul sistem, componentele:

$$(C_{11}, C_{21}, C_{31}), \quad (C_{12}, C_{22}, C_{32}), \quad (C_{13}, C_{23}, C_{33}).$$

Dacă un punct oarecare P din spațiu are coordonatele X_1, X_2, X_3 în raport cu sistemul $\Omega A_1A_2A_3$, și coordonatele X_1', X_2', X_3' în raport cu sistemul $\Omega'A_1'A_2'A_3'$ atunci am arătat că între X_1, X_2, X_3 și X_1', X_2', X_3' avem formulele:

$$\begin{aligned} X_1 &= X_1'C_{11} + X_2'C_{12} + X_3'C_{13} + C_1, \\ X_2 &= X_1'C_{21} + X_2'C_{22} + X_3'C_{23} + C_2, \qquad (79) \\ X_3 &= X_1'C_{31} + X_2'C_{32} + X_3'C_{33} + C_3. \end{aligned}$$

Am arătat de asemenea că formulele (79) se pot inversa prin formule de aceeaşi formă

$$X'_1 = X_1C'_{11} + X_2C'_{12} + X_3C'_{13} + C'_1$$
$$X'_2 = X_1C'_{21} + X_2C'_{22} + X_3C'_{23} + C'_2 \qquad (79')$$
$$X'_3 = X_1C'_{31} + X_2C'_{32} + X_3C'_{33} + C'_3,$$

unde C'_{1i}, C'_{2i}, C'_{3i} sînt componentele translaţiilor S_i, în raport cu sistemul $\Omega' A'_1 A'_2 A'_3$, iar C'_1, C'_2, C'_3 sînt coordonatele punctului Ω în raport cu acelaşi sistem.

Păstrînd aceleaşi elemente C'_{ij}, C'_i, să considerăm transformarea spaţiului afin θ, care asociază fiecărui punct P, de coordonate X_1, X_2, X_3 în raport cu sistemul $\Omega A_1A_2A_3$, punctul P' de coordonate X'_1, X'_2, X'_3, date de formulele (79'), în raport tot cu sistemul $\Omega A_1A_2A_3$.

Transformarea θ astfel definită este biunivocă, avînd transformarea inversă θ^{-1} dată de formulele (79).

Să arătăm că θ transformă puncte coliniare în puncte coliniare. Să considerăm pentru aceasta o dreaptă d, definită prin ecuaţiile parametrice:

$$X_1 = HP_1 + M_1,\ X_2 = HP_2 + M_2,\ X_3 = HP_3 + M_3,$$

H fiind parametrul, P_1, P_2, P_3 — parametrii directori ai dreptei, iar M_1, M_2, M_3 — coordonatele unui punct M al dreptei d. Introducînd aceste relaţii în formulele (79'), obţinem:

$$X'_1 = H(P_1C'_{11} + P_2C'_{12} + P_3C'_{13}) + (M_1C'_{11} + M_2C'_{12} + M_3C'_{13} + C'_1)$$
$$X'_2 = H(P_1C'_{21} + P_2C'_{22} + P_3C'_{23}) + (M_1C'_{21} + M_2C'_{22} + M_3C'_{23} + C'_2)$$
$$X'_3 = H(P_1C'_{31} + P_2C'_{32} + P_3C'_{33}) + (M_1C'_{31} + M_2C'_{32} + M_3C'_{33} + C'_3),$$

care arată că punctul P' de coordonate X'_1, X'_2, X'_3 deci transformatul prin θ al punctului $P(X_1, X_2, X_3)$, care descrie dreapta d, descrie o dreaptă d', avînd parametrii directori:

$$P'_1 = P_1C'_{11} + P_2C'_{12} + P_3C'_{13}$$
$$P'_2 = P_1C'_{21} + P_2C'_{22} + P_3C'_{23}$$
$$P'_3 = P_1C'_{31} + P_2C'_{32} + P_3C'_{33},$$

şi trecînd prin punctul $M' = \theta(M)$ avînd coordonatele:

$$M'_1 = M_1C'_{11} + M_2C'_{12} + M_3C'_{13} + C'_1$$
$$M'_2 = M_1C'_{21} + M_2C'_{22} + M_3C'_{23} + C'_2$$
$$M'_3 = M_1C'_{31} + M_2C'_{32} + M_3C'_{33} + C'_3.$$

Rezultă că formulele (79') *definesc un automorfism al spaţiului afin.*

Vrem să arătăm acum că orice automorfism θ al spaţiului euclidian afin este dat de formule de forma (79).

Pentru demonstraţie, să observăm în primul rînd că dacă T, respectiv H este o translaţie, respectiv o omotetie, atunci $\theta T\theta^{-1}$, $\theta H\theta^{-1}$ este o translaţie, respectiv o omotetie. Într-adevăr, dacă P'_1, P'_2 sînt două puncte oarecare ale spaţiului şi dacă $P = \theta^{-1}(P'_1)$, $P_2 = \theta^{-1}(P'_2)$, $Q_1 = T(P_1)$, $Q_2 = T(P_2)$, atunci avem:

$$Q'_1 = (\theta T\theta^{-1})(P'_1) = (\theta T)(P_1) = \theta(Q_1),$$
$$Q'_2 = (\theta T\theta^{-1})(P'_2) = (\theta T)(P_2) = \theta(Q_2).$$

Din relaţiile $Q_1 = T(P_1)$, $Q_2 = T(P_2)$ rezultă:

$$P_1P_2 \parallel Q_1Q_2,$$

aşadar, avem, utilizînd teorema 3,

$$P'_1P'_2 = \theta(P_1P_2) \parallel \theta(Q_1Q_2) = Q'_1Q'_2.$$

Prin urmare, transformarea $\theta T\theta^{-1}$ transformă dreapta $P'_1P'_2$ într-o dreaptă $Q'_1Q'_2$, paralelă cu $P'_1P'_2$. Rezultă că $\theta T\theta^{-1}$ este un automorfism special. La fel se arată că $\theta H\theta^{-1}$ este un automorfism special.

T fiind o translaţie, avem:

$$P_1Q_1 \parallel P_2Q_2$$

şi aplicînd automorfismul θ, rezultă:

$$P'_1Q'_1 \parallel P'_2Q'_2$$

şi ultima relaţie arată că transformarea $\theta T\theta^{-1}$ este o translaţie.

H fiind o omotetie admite un punct O invariant, deci:

$$H(O) = O.$$

Punînd $O' = \theta(O)$, vom avea $\theta^{-1}(O') = O$ şi deci:

$$(\theta H\theta^{-1})(O') = (\theta H)(O) = \theta(O) = O'$$

şi rezultă că $\theta H\theta^{-1}$ este o omotetie de centru O'.

Să observăm acum că notînd cu S translaţia care duce punctul O în punctul $O' = \theta(O)$, avem:

$$(S^{-1}\theta)(O) = O,$$

deci $\theta' = S^{-1}\theta$ este un automorfism al spaţiului afin, ce lasă invariant punctul O.

Presupunînd că O este centrul omotetiilor ce formează corpul coordonatelor, să considerăm un sistem de coordonate $\Omega A_1 A_2 A_3$ în spaţiu şi să punem:

$$\Omega' = \theta'(\Omega),\ A_1' = \theta'(A_1),\ A_2' = \theta'(A_2),$$
$$A_3' = \theta'(A_3),\ \theta' = S^{-1}\theta.$$

Pentru un punct oarecare $P(X_1, X_2, X_3)$, avem:

$$P = [X_1(S_1) + X_2(S_2) + X_3(S_3)](\Omega),$$
$$P' = [X_1'(S_1) + X_2'(S_2) + X_3'(S_3)](\Omega)$$

şi pe de altă parte, dacă $P' = \theta'(P)$, $\Omega' = \theta'(\Omega)$,

$$P' = \theta'[X_1(S_1) + X_2(S_2) + X_3(S_3)](\Omega) =$$
$$= \theta'[X_1(S_1)X_2(S_2) + X_3(S_3)]\,\theta'^{-1})(\Omega').$$

Ultima formulă se mai poate scrie:

$$P' = (\theta' X_1 S_1 X_1^{-1} \cdot X_2 S_2 X_2^{-1} \cdot X_3 S_3 X_3^{-1} \theta'^{-1})(\Omega').$$

Notînd în general, pentru o transformare U, prin $\widetilde{U}$ transformarea

$$\widetilde{U} = \theta' U \theta'^{-1},$$

mai putem scrie:

$$P' = (\theta' X_1 \theta'^{-1} \cdot \theta' S_1 \theta'^{-1} \theta' X_1^{-1} \theta'^{-1} \ldots \theta' X_3^{-1} \theta'^{-1})(\Omega'),$$

sau:

$$P' = (\widetilde{X}_1 \widetilde{S}_1 \widetilde{X}_1^{-1} \cdot \widetilde{X}_2 \widetilde{S}_2 \widetilde{X}_2^{-1} \cdot \widetilde{X}_3 \widetilde{S}_3 \widetilde{X}_3^{-1})(\Omega').$$

Dintr-o observaţie făcută mai sus rezultă că $\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2, \widetilde{X}_3$ sînt omotetii de centru $\theta'(O) = O$, deci din corpul coordonatelor, iar $\widetilde{S}_1, \widetilde{S}_2, \widetilde{S}_3$ sînt translaţii. Putem deci scrie:

$$P' = [\widetilde{X}_1(\widetilde{S}_1) + \widetilde{X}_2(\widetilde{S}_2) + \widetilde{X}_3(\widetilde{S}_3)](\Omega'). \tag{80}$$

Să observăm acum că avem:

$$\widetilde{S}_1(\Omega') = (\theta' S_1 \theta'^{-1})(\Omega') = (\theta' S_1)(\Omega) = \theta'(A_1) = A_1'$$

şi în mod analog, obţinem:

$$\widetilde{S}_2(\Omega') = A_2',\ \widetilde{S}_3(\Omega') = A_3'.$$

Rezultă că $\widetilde{S}_1, \widetilde{S}_2, \widetilde{S}_3$ sînt translaţiile unitare de-a lungul axelor sistemului de coordonate $\Omega' A_1' A_2' A_3'$. Formula (80) ne spune atunci că $\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2, \widetilde{X}_3$ sînt coordonatele punctului $P' = \theta(P)$ în raport cu sistemul $\Omega' A_1' A_2' A_3'$. Coordonatele X_1', X_2', X_3' ale punctului P' în raport cu sistemul $\Omega A_1 A_2 A_3$ vor fi date de formule de forma (79):

$$\begin{aligned} X_1' &= X_1 C_{11} + X_2 C_{12} + X_3 C_{13} + C_1 \\ X_2' &= \widetilde{X}_1 C_{21} + \widetilde{X}_2 C_{22} + \widetilde{X}_3 C_{23} + C_2 \\ X_3' &= \widetilde{X}_1 C_{31} + \widetilde{X}_2 C_{32} + \widetilde{X}_3 C_{33} + C_3. \end{aligned} \tag{81}$$

Rezultă că transformarea $\theta = S\theta'$ va fi dată de formule de aceeaşi formă, unde în loc de C_1, C_2, C_3 vor apărea elementele $E_1 = C_1 + D_1$, $E_2 = C_2 + D_2$, $E_3 = C_3 + D_3$, unde D_1, D_2, D_3 sînt componentele translaţiei S în raport cu sistemul $\Omega A_1 A_2 A_3$. Notînd cu Y_1, Y_2, Y_3 coordonatele punctului $Q = \theta(P)$, vom avea deci:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \widetilde{X}_1 C_{11} + \widetilde{X}_2 C_{12} + \widetilde{X}_3 C_{13} + E_1 \\ Y_2 &= \widetilde{X}_1 C_{21} + \widetilde{X}_2 C_{22} + \widetilde{X}_3 C_{23} + E_2 \\ Y_3 &= \widetilde{X}_1 C_{31} + \widetilde{X}_2 C_{32} + \widetilde{X}_3 C_{33} + E_3. \end{aligned} \tag{82}$$

Rezultă că automorfismul θ este dat de formule de forma (82), unde avem:

$$\widetilde{X}_1 = \theta' X_1 \theta'^{-1},\ \widetilde{X}_2 = \theta' X_2 \theta'^{-1},\ \widetilde{X}_3 = \theta' X_3 \theta'^{-1}. \tag{82'}$$

Oricare ar fi coeficienţii C_{ij}, C_i transformarea (82) transformă puncte coliniare în puncte coliniare şi puncte coplanare în puncte coplanare, dar s-ar putea întîmpla ca transformarea (82) să nu fie biunivocă.

De exemplu, transformarea $Y_1 = X_1$, $Y_2 = 0$, $Y_3 = 0$ duce toate punctele spaţiului pe axa ΩA_1. Dacă însă C_{1i}, C_{2i}, C_{3i} sînt componentele a trei translaţii necoplanare, transformarea (82) este biunivocă.

Să arătăm acum că în cazul spaţiului euclidian afin avem:

$$\widetilde{X}_1 = X_1,\ \widetilde{X}_2 = X_2,\ \widetilde{X}_3 = X_3.$$

Într-adevăr, corespondenţa

$$X \to \widetilde{X} = \theta' X \theta'^{-1}$$

este un automorfism al corpului coordonatelor, deoarece avem:

$$\theta' (X + Y)\theta'^{-1} = \theta' X \theta'^{-1} + \theta' Y \theta'^{-1}; \qquad (83)$$

$$\theta'(XY)\theta'^{-1} = (\theta' X \theta'^{-1})(\theta' Y \theta'^{-1}). \qquad (84)$$

Formula (84) este evidentă, deoarece putem suprima în dreapta produsul $\theta'^{-1}\theta'$.

Pentru a demonstra formula (83), să considerăm un punct oarecare P' în spaţiu şi să punem $P = \theta'^{-1}(P')$. Atunci avem:

$$(\theta'(X + Y)\theta'^{-1})(P') = \theta' (X + Y)(P) = \theta'(U \cdot V)(O), \qquad (85)$$

unde U, V sînt translaţiile definite de formulele:

$$U(O) = X(P),\ V(O) = Y(P). \qquad (86)$$

Mai putem scrie formula (85) sub forma:

$$(\theta'(X + Y)\ \theta'^{-1})(P') = (\theta'(UV)\theta'^{-1})\ (O),$$

deoarece θ' lasă invariant punctul O; putem scrie mai departe:

$$(\theta'(X + Y)\theta'^{-1})(P') = (\theta' U \theta'^{-1}\theta' V \theta'^{-1})(O) = (\widetilde{U}\widetilde{V})(O), \qquad (87)$$

unde $\widetilde{U}$, $\widetilde{V}$ sînt translaţiile:

$$\widetilde{U} = \theta' U\ \theta'^{-1},\ \widetilde{V} = \theta' V \theta'^{-1}.$$

Punînd $\widetilde{X} = \theta' X \theta'^{-1}$, $\widetilde{Y} = \theta' Y \theta'^{-1}$, avem:

$$\widetilde{X}(P') = (\theta' X \theta'^{-1})(P') = (\theta' X)(P) = (\theta' U)(O) =$$
$$= (\theta' U \theta'^{-1})\ (O) = \widetilde{U}(O),$$

$$\widetilde{Y}(P') = (\theta' Y \theta'^{-1})(P') = (\theta' Y)(P) = (\theta' V)\ (O) =$$
$$= (\theta' V \theta'^{-1})(O) = \widetilde{V}(O);$$

comparînd cu (87) şi ţinînd seama de definiţia sumei a două omotetii, rezultă că avem:

$$(\theta'\ (X + Y)\ \theta'^{-1})(P') = (\widetilde{X} + \widetilde{Y})(P'),$$

ceea ce demonstrează formula (83).

În cazul spaţiului euclidian afin corpul coordonatelor este izomorf cu corpul numerelor reale. Vom arăta că acest corp nu admite automorfisme diferite de automorfismul identic, utilizînd faptul că orice număr real pozitiv este pătratul unui număr real.

Într-adevăr, fie φ un automorfism al corpului numerelor reale. Atunci avem, oricare ar fi numerele reale x, y,

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y), \qquad (88)$$

$$\varphi(xy) = \varphi(x) \cdot \varphi(y). \qquad (89)$$

Punînd în (88) $x = 0$, rezultă $\varphi(y) = \varphi(y) + \varphi(0)$, deci avem $\varphi(0) = 0$. Punînd în (89) $x = 1$, rezultă $\varphi(y) = \varphi(1)\ \varphi(y)$ şi cum $\varphi(y) \neq 0$, dacă $y \neq 0$, rezultă $\varphi(1) = 1$. Atunci avem: $\varphi(m) = \varphi(1 + \ldots + 1) = \varphi(1) + \ldots + \varphi(1) = m$, pentru orice număr natural m. Apoi din $\frac{1}{m} \cdot m = 1$ rezultă: $\varphi\left(\frac{1}{m}\right)\varphi(m) = 1$, deci:

$$\varphi\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{1}{\varphi(m)} = \frac{1}{m}$$

şi din $\frac{n}{m} = n \cdot \frac{1}{m}$ deducem:

$$\varphi\left(\frac{n}{m}\right) = \varphi(n)\ \varphi\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{n}{m}.$$

Deci automorfismul φ lasă invariante toate numerele raţionale pozitive. Din $-\frac{n}{m} + \frac{n}{m} = 0$ rezultă $\varphi\left(-\frac{n}{m}\right) + \varphi\left(\frac{n}{m}\right) = 0$, deci: $\varphi\left(-\frac{n}{m}\right) = -\frac{n}{m}$, deci φ nu schimbă nici numerele raţionale negative.

Fie x un număr iraţional oarecare şi r', r'' două numere raţionale, astfel ca:

$$r' < x < r''.$$

Atunci numerele iraţionale $r'' - x$, $x - r'$ sînt pozitive. Deci există două numere reale a, b, astfel încît să avem:

$$r'' - x = a^2,\ x - r' = b^2.$$

Aplicînd automorfismul φ, rezultă:

$$r'' - \varphi(x) = \varphi(r'') - \varphi(x) = \varphi(r'' - x) = \varphi(a^2) = \varphi((a))^2 > 0,$$

$$\varphi(x) - r' = \varphi(x) - \varphi(r') = \varphi(x - r') = \varphi(b^2) = (\varphi(b))^2 > 0$$

şi deducem relaţiile:

$$r' < \varphi(x) < r''.$$

Aşadar, orice interval cu capetele raţionale, ce conţine numărul x, conţine şi numărul $\varphi(x)$. Rezultă:

$$\varphi(x) = x. \tag{90}$$

Deci corpul numerelor reale nu admite automorfisme diferite de automorfismul identic (90) şi rezultă că în cazul spaţiului euclidian afin, în formulele (82) avem $\widetilde{X}_1 = X_1$, $\widetilde{X}_2 = X_2$, $\widetilde{X}_3 = X_3$. Avem deci:

T e o r e m a 4. *Automorfismele spaţiului euclidian afin sînt date de formule de forma*:

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= C_{11}X_1 + C_{12}X_2 + C_{13}X_3 + C_1 \\ Y_2 &= C_{21}X_1 + C_{22}X_2 + C_{23}X_3 + C_2 \\ Y_3 &= C_{31}X_1 + C_{32}X_2 + C_{33}X_3 + C_3, \end{aligned}\right\} \tag{91}$$

coeficienţii C_{ij}, C_i *fiind astfel, încît transformarea* (91) *să fie inversabilă.*

Se ştie din algebră că ultima condiţie se poate exprima sub forma:

$$\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Se numeşte *spaţiu afin complex* spaţiul afin în care corpul coordonatelor este izomorf cu corpul K al numerelor complexe. Corpul K admite, în afara automorfismului identic, automorfismul care asociază fiecărui număr complex z conjugatul său $\bar{z}$. Avem într-adevăr:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2,$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$$

Rezultă că automorfismele spaţiului afin complex sînt de două tipuri. Ele pot fi definite de formule de forma:

$$\begin{aligned} z_1' &= c_{11}z_1 + c_{12}z_2 + c_{13}z_3 + c_1, \\ z_2' &= c_{21}z_1 + c_{22}z_2 + c_{23}z_3 + c_2, \\ z_3' &= c_{31}z_1 + c_{32}z_2 + c_{33}z_3 + c_3, \end{aligned}$$

sau:

$$\begin{aligned} z_1' &= c_{11}\bar{z}_1 + c_{12}\bar{z}_2 + c_{13}\bar{z}_3 + c_1, \\ z_2' &= c_{21}\bar{z}_1 + c_{22}\bar{z}_2 + c_{23}\bar{z}_3 + c_2, \\ z_3' &= c_{31}\bar{z}_1 + c_{32}\bar{z}_2 + c_{33}\bar{z}_3 + c_3, \end{aligned}$$

unde c_{ij}, c_i sînt numere complexe cu determinantul $|c_{ij}|$ diferit de zero[1].

Corespondenţe afine între plane din spaţiul afin. Fie α, β două plane în spaţiu. Se numeşte *transformare afină* sau *corespondenţă afină* între planele α, β o corespondenţă biunivocă θ între aceste plane, care transformă puncte coliniare ale planului α în puncte coliniare ale planului β. O astfel de corespondenţă *transformă puncte necoliniare ale planului* α *în puncte necoliniare ale planului* β.

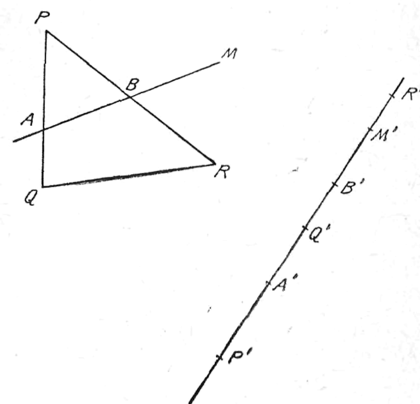


Fig. 101

Într-adevăr, să presupunem prin absurd că transformarea afină θ duce punctele necoliniare P, Q, R ale planului α în punctele coliniare P', Q', R' ale planului β (fig. 101).

În acest caz dreptele PQ, RQ, RP se transformă în aceeaşi dreaptă $P'Q'R'$. Ducînd printr-un punct oarecare M al planului α o dreaptă d ce intersectează laturile triunghiului PQR în două puncte distincte A, B, punctul $M' = \theta(M)$ se va găsi pe dreapta $A'B'$, unde $A' = \theta(A)$, $B' = \theta(B)$. Dar dreapta $A'B'$ coincide cu dreapta $P'Q'R'$, deci rezultă că toate punctele planului α au imaginile pe dreapta $P'Q'R'$, deci

[1] În Algebră se arată că există o infinitate de automorfisme ale corpului complex. Dintre acestea, numai cele două automorfisme indicate $\varphi(z) = z$, $\varphi(z) = \bar{z}$ sînt continue, în sensul că transformă şiruri convergente de numere complexe în şiruri convergente.

punctele planului β exterioare dreptei $P'Q'R'$ nu sînt imagini de puncte din planul α, deci corespondența θ nu poate fi biunivocă.

Rezultă din proprietatea demonstrată că *o transformare afină între planele α, β duce drepte paralele în drepte paralele*. Într-adevăr, dacă dreptele d_1, d_2 din planul α n-au nici un punct comun și dacă imaginile lor d_1', d_2' din planul β ar avea un punct comun M', acest punct ar fi imaginea unui punct M din planul α. Punctul M ar fi exterior cel puțin uneia din dreptele d_1, d_2, deoarece $d_1 \parallel d_2$. Dacă M este însă exterior dreptei d_1, de exemplu, M împreună cu două puncte ale dreptei d_1 s-ar transforma în trei puncte ale dreptei d_1', ceea ce contrazice rezultatul stabilit mai sus.

Cele două proprietăți demonstrate pentru corespondențele afine între două plane permit să arătăm, ca în cazul automorfismelor spațiului afin, că dacă θ este o corespondență afină între planele α, β și dacă T, H este o translație, respectiv o omotetie în planul α[1], atunci:

$$T' = \theta T \theta^{-1}, \quad H' = \theta H \theta^{-1}$$

va fi o translație, respectiv o omotetie în planul β.

Fie Ω, A_1, A_2 trei puncte necoliniare în planul α (fig. 102) și S_1, S_2 translațiile planului α definite de vectorii $\overrightarrow{\Omega A_1}$, respectiv $\overrightarrow{\Omega A_2}$. Avem deci:

$$S_1(\Omega) = A_1, \quad S_2(\Omega) = A_2.$$

Fiind dat un punct oarecare P în planul α, paralele duse prin P la axele ΩA_1, ΩA_2 întîlnesc aceste axe în punctele P_1, P_2 și putem considera translațiile T_1, T_2 definite de vectorii

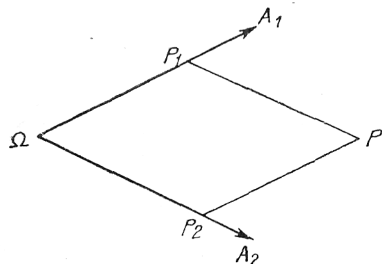


Fig. 102

$$\overrightarrow{\Omega P_1}, \quad \overrightarrow{\Omega P_2};$$

deci avem:

$$T_1(\Omega) = P_1, \quad T_2(\Omega) = P_2.$$

Omotetiile din corpul coordonatelor spațiului afin, date de rapoartele

$$X_1 = \frac{T_1}{S_1}, \quad X_2 = \frac{T_2}{S_2},$$

[1] Prin translație sau omotetie într-un plan α înțelegem o translație sau o omotetie a spațiului afin, definite de un vector $\overrightarrow{AB}$ sau de trei puncte O, P, P', cu A, B, O, P, P' situate în planul α. Aceste transformări vor induce transformări ale planului α în el însuși.

se pot considera drept *coordonatele punctului* P în raport cu sistemul de coordonate carteziene $\Omega A_1 A_2$ din planul α. Ele coincid cu primele două coordonate ale lui P, în raport cu un sistem de coordonate în spațiu de forma $\Omega A_1 A_2 A_3$, cu A_3 exterior planului α.

Omotetiile X_1, X_2 nu transformă planul α în el însuși, deoarece au centrul într-un punct O ce nu se presupune în planul α, fiind centrul fixat de la început al omotetiilor ce formează corpul coordonatelor. X_1 și X_2 transformă însă translațiile din planul α, deci translațiile definite de vectori din planul α sau paraleli cu planul α, în translații de același fel.

Pentru punctul P putem scrie formula:

$$P = [X_1(S_1) + X_2(S_2)](\Omega) = X_1 S_1 X_1^{-1} \cdot X_2 S_2 X_2^{-1}(\Omega).$$

Să notăm cu Ω', A_1', A_2', P' imaginile în planul β ale punctelor Ω, A_1, A_2, P, prin transformarea afină θ. Avem:

$$P' = \theta(P) = \theta(X_1 S_1 X_1^{-1} \cdot X_2 S_2 X_2^{-1})\Omega)) =$$
$$= (\theta X_1 S_1 X_1^{-1} X_2 S_2 X_2^{-1} \theta^{-1})(\Omega') = (\theta X_1 \theta^{-1} \cdot \theta S_1 \theta^{-1} \cdot \theta X_1^{-1} \theta^{-1} \cdot$$
$$\cdot\, \theta X_2 \theta^{-1} \cdot \theta S_2 \theta^{-1} \theta X_2^{-1} \theta^{-1})(\Omega') = X_1' S_1' X_1'^{-1} \cdot X_2' S_2' X_2'^{-1}(\Omega')$$

unde am notat:

$$X_1' = \theta X_1 \theta^{-1}, \; X_2' = \theta X_2 \theta^{-1}, \; S_1' = \theta S_1 \theta^{-1}, \; S_2' = \theta S_2 \theta^{-1}$$

și deci X_1', X_2' sînt omotetii, iar S_1', S_2' sînt translații. Avem:

$$S_1'(\Omega') = (\theta S_1 \theta^{-1})(\Omega') = (\theta S_1)(\Omega) = \theta(A_1) = A_1'$$
$$S_2'(\Omega') = (\theta S_2 \theta^{-1})(\Omega') = (\theta S_2)(\Omega) = \theta(A_2) = A_2',$$

deci S_1', S_2' sînt translațiile unitare de-a lungul axelor sistemului de coordonate carteziene $\Omega' A_1' A_2'$ din planul β. Apoi avem:

$$(X_1'(S_1'))(\Omega') = (X_1' S_1' X_1'^{-1})(\Omega') = (\theta X_1 S_1 X_1^{-1} \theta^{-1})(\Omega') =$$
$$= (\theta X_1 S_1 X_1^{-1})(\Omega) = (\theta T_1)(\Omega) = \theta(P_1) = P_1'$$

și analog găsim:

$$(X_2'(S_2'))(\Omega') = \theta(P_2) = P_2'.$$

Cum dreptele $P'P_2'$, $P'P_2'$ sînt paralele cu axele $\Omega' A_1'$, $\Omega' A_2'$, rezultă că X_1', X_2' sînt coordonatele punctului P' în raport cu sistemul $\Omega' A_1' A_2'$ din planul β.

Rezultă că dacă alegem în planele α, β sistemele de coordonate ΩA_1A_2, $\Omega' A'_1A'_2$ ce se corespund prin transformarea θ, această transformare va duce punctul $P(X_1, X_2)$ din planul α în punctul P' (X'_1, X'_2) din planul β, unde:

$$X'_1 = \theta X_1\theta^{-1},\ X'_2 = \theta X_2\theta^{-1}.$$

Ca în cazul automorfismelor spațiului afin, se arată că asociind fiecărui element X al corpului C al coordonatelor elementul $X' = \theta X\theta^{-1}$, obținem un automorfism al corpului C.

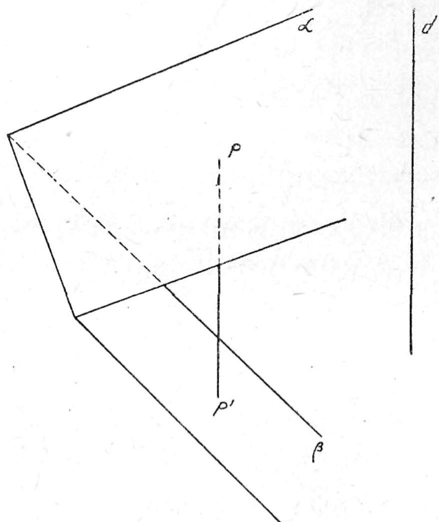


Fig. 103

În cazul spațiului euclidian afin, cînd C este izomorf cu corpul numerelor reale, am arătat că nu există alte automorfisme ale corpului în afara automorfismului identic. În acest caz, corespondențele afine θ între planele α, β, raportate la sisteme de coordonate corespondente prin θ, sînt date de formulele:

$$X'_1 = X_1,\ X'_2 = X_2. \tag{92}$$

Obținem un exemplu geometric de corespondență afină între planele α, β dacă alegem o dreaptă d în spațiu, care să nu fie paralelă cu nici unul din planele α, β (fig. 103), asociind fiecărui punct P din planul α intersecția P' a dreptei paralele cu d, dusă prin P, cu planul β. Într-adevăr, se verifică ușor că această corespondență este biunivocă și duce dreptele în drepte. Corespondențele de acest fel au proprietatea că lasă invariante punctele comune planelor α, β, dacă aceste plane nu sînt paralele.

Dacă planele α, β sînt paralele, unei drepte δ din planul α îi corespunde o dreaptă δ' din planul β, paralelă cu dreapta δ. Corespondențele de acest fel se numesc *proiecții prin drepte paralele* sau *proiecții afine*.

Se poate arăta că dacă o corespondență afină θ între două plane α, β lasă invariante punctele comune celor două plane, sau dacă transformă orice dreaptă δ din planul α într-o dreaptă δ', paralelă cu δ, atunci θ este o proiecție afină. De asemenea, se arată că orice corespondență afină între două plane α, β se poate obține ca un produs de cel mult trei proiecții afine:

$$\alpha \to \gamma_1,\ \gamma_1 \to \gamma_2,\ \gamma_2 \to \beta,$$

cu ajutorul unor plane auxiliare γ_1, γ_2.

Să observăm, în sfîrșit, că se pot considera corespondențe afine în același plan, deci transformări biunivoce ale punctelor unui plan, care transformă puncte coliniare în puncte coliniare. Analitic, aceste transformări se pot exprima prin formule de forma:

$$\begin{aligned} X^*_1 &= X_1C_{11} + X_2C_{12} + C_1 \\ X^*_2 &= X_1C_{21} + X_2C_{22} + C_2, \end{aligned} \tag{93}$$

unde X_1, X_2 sînt coordonatele unui punct P în raport cu un sistem de coordonate ΩA_1A_2, iar X^*_1, X^*_2 sînt coordonatele punctului transformat, în raport cu același sistem de coordonate. Într-adevăr, folosind formulele (92) și formulele care dau trecerea de la sistemul de coordonate $\Omega' A'_1A'_2$ la sistemul ΩA_1A_2, obținem formulele (93).

Corelații între plane. Fie α, β două plane din spațiul euclidian afin. Se numește *corelație* între aceste plane o transformare ω care asociază punctelor din planul α drepte din planul β, astfel încît la puncte coliniare să corespundă drepte concurente sau paralele. O astfel de corespondență nu poate fi niciodată biunivocă; există întotdeauna drepte în planul β ce nu corespund la puncte din planul α. Vom considera de asemenea *corelații cu centru*, care nu sînt definite într-un anumit punct al planului α, numit centrul corelației.

Să presupunem, de exemplu, că am ales sisteme de coordonate carteziene ΩA_1A_2, $\Omega' A'_1A'_2$ în planele α, β. Dreptele planului β sînt date de ecuații de forma:

$$a_1x'_1 + a_2x'_2 + a = 0 \tag{94}$$

unde a_1, a_2 nu pot fi în același timp nuli. Dacă asociem fiecărui punct $P(x_1, x_2)$ dreapta (94) din planul β avînd:

$$a_1 = x_1, \; a_2 = x_2, \; a = 1, \tag{95}$$

obținem o corespondență ce nu este definită în punctul Ω.

Dacă punctul $P(x_1, x_2)$ descrie o dreaptă, coordonatele x_1, x_2 depind de un parametru t sub forma:

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 t + q_1, \\ x_2 &= p_2 t + q_2, \end{aligned} \tag{95'}$$

p_1, p_2, q_1, q_2 fiind numere fixe. Pentru dreptele corespondente în planul β vom avea:

$$a_1 = p_1 t + q_1, \; a_2 = p_2 t + q_2, \; a = 1$$

și vor fi date de ecuații de forma:

$$(p_1 t + q_1)x'_1 + (p_2 t + q_2)x'_2 + 1 = 0. \tag{96}$$

Aceste drepte trec toate prin punctul comun dreptelor

$$p_1 x'_1 + p_2 x'_2 = 0, \; q_1 x'_1 + q_2 x'_2 + 1 = 0, \tag{96'}$$

sau sînt paralele între ele, dacă ultimele două drepte sînt paralele. Într-adevăr, dacă dreptele (96') au punctul comun (x'_1, x'_2), atunci acest punct verifică ecuația (96), oricare ar fi parametrul t. Iar dacă dreptele (96') sînt paralele, avem:

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2}$$

și atunci, oricare ar fi t, avem:

$$\frac{p_1 t + q_1}{q_1} = \frac{p_2 t + q_2}{q_2}.$$

Rezultă că formulele (95) definesc o corelație cu centrul în punctul Ω.

Ca exemplu de corelație fără centru putem da corespondența care asociază fiecărui punct $P(x_1, x_2)$ din planul α dreapta (94) din planul β, avînd:

$$a_1 = x_1, \quad a_2 = 1, \quad a = x_2. \tag{97}$$

În acest caz avem întotdeauna $a_2 \neq 0$, deci transformarea este definită în orice punct al planului α. Dacă punctul $P(x_1, x_2)$ descrie

dreapta (95'), atunci dreapta corespunzătoare trece prin punctul comun dreptelor

$$p_1 x'_1 + p_2 = 0, \quad q_1 x'_1 + x'_2 + q_2 = 0,$$

deci formulele (97) definesc o corelație fără centru.

Să observăm că pentru corelația (95), dreptele planului β ce trec prin punctul Ω' nu corespund la puncte din planul α, deoarece pentru aceste drepte avem $a = 0$.

Iar pentru corelația (97), dreptele din planul β pentru care avem $a_2 = 0$, deci dreptele paralele cu axa $\Omega' A'_2$ nu corespund la puncte din planul α.

Vom numi punct singular al unei corelații ω între planele α, β un punct din planul β, astfel încît dreptele ce trec prin acest punct nu corespund la puncte din planul α. Astfel Ω' este punct singular al corelației (95). Corelația (97) n-are nici un punct singular, dar are o *direcție singulară*, anume direcția axei $\Omega' A'_2$, în sensul că dreptele planului β, paralele cu această axă, nu corespund la puncte din planul α.

Vom spune că o corelație ω este *nedegenerată*, dacă are un singur punct singular sau o singură direcție singulară. Deci cu excepția dreptelor ce trec printr-un anumit punct, sau ce sînt paralele cu o anumită dreaptă, orice altă dreaptă din planul β este imaginea unui punct din planul α.

Dacă ω este o corelație a planelor α, β și dacă θ este o transformare afină a planului α în el însuși, atunci $\omega\theta$ este o corelație a planului α în planul β, avînd același punct singular sau aceeași direcție singulară cu ω.

Reciproc, dacă ω', ω sînt două corelații ale planului α cu planul β, avînd același punct singular sau aceeași direcție singulară, atunci $\theta = \omega^{-1}\omega'$ este o transformare afină a planului α în el însuși.

Dacă ω este o corelație a planului α în planul β și dacă θ' este o transformare afină a planului β în el însuși, atunci $\theta'\omega$ este o corelație între planele α, β, avînd ca punct singular sau ca direcție singulară imaginea prin θ' a punctului singular sau a direcției singulare a corelației ω.

Fie ω_0, ω_1 două corelații între planele α, β avînd un punct singular, respectiv, o direcție singulară. Putem presupune, de exemplu, că aceste corelații sînt date de formulele (95), respectiv (97). Din observațiile precedente rezultă că orice corelație între planele α, β este de forma $\theta'\omega_0\theta$ sau $\theta'\omega_1\theta$, unde θ, θ' sînt transformări afine ale planelor α, β în ele însele. În particular, corelațiile cu punctul singular Ω' sînt de forma $\omega_0\theta$, iar corelațiile cu punctul singular Ω' și cu centrul în Ω sînt de forma $\omega_0\theta$, unde θ este o transformare afină a pla-

nului α, ce lasă invariant punctul Ω. Rezultă că aceste corelații sînt date de formule de forma:

$$a_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_1 \qquad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (98)$$
$$a_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_2,$$

unde a_1, a_2 sînt coeficienții din ecuația:

$$a_1x'_1 + a_2x'_2 + 1 = 0,$$

ce definește dreapta din planul β, imagine a punctului $P(x_1, x_2)$ din planul α.

Să presupunem că planele α, β coincid și că sistemele de coordonate ΩA_1A_2, $\Omega' A'_1A'_2$ sînt de asemenea identice.

O corelație ω a planului α cu el însuși se numește *corelație involutivă* sau *polaritate*, dacă pentru orice punct P al planului α, diferit de centru, dreptele $\omega(P')$ ce corespund punctelor P' de pe dreapta $d = \omega(P)$, trec prin punctul P.

Un punct $P'(x'_1, x'_2)$ de pe dreapta $\omega(P)$ ce corespunde punctului $P(x_1, x_2)$ prin corelația (98) verifică ecuația:

$$(c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_1)x'_1 + (c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_2)x'_2 + 1 = 0. \qquad (99)$$

Prin aceeași corelație, punctului P' îi corespunde dreapta d' dată de ecuația:

$$(c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2 + c_1)x_1 + (c_{21}x'_1 + c_{22}x'_2 + c_2)x_2 + 1 = 0.$$

Condiția ca ω să fie involutivă este ca să avem:

$$(c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2 + c_1)x_1 + (c_{21}x'_1 + c_{22}x'_2 + c_2)x_2 + 1 = 0, \qquad (100)$$

îndată ce (x'_1, x'_2) verifică ecuația (99).

Luînd $x_1 = \lambda$, $x_2 = 0$, va trebui să avem:

$$\lambda(c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2 + c_1) + 1 = 0,$$

îndată ce

$$(c_{11}\lambda + c_1)x'_1 + (c_{21}\lambda + c_2)x'_2 + 1 = 0,$$

de unde rezultă condițiile:

$$\frac{\lambda c_{11}}{\lambda c_{11} + c_1} = \frac{\lambda c_{12}}{\lambda c_{21} + c_2} = \lambda c_1 + 1;$$

deci trebuie să avem:

$$\lambda^2 c_{11}c_1 + \lambda c_1^2 + c_1 = 0, \ \lambda c_{12} = \lambda^2 c_{21}c_1 + \lambda c_1c_2 + c_2 + \lambda c_{21},$$

oricare ar fi λ. Deci avem:

$$c_1 = 0, \quad c_{21} = c_{21}, \quad c_2 = 0.$$

Dacă aceste condiții sînt verificate, se vede că ecuațiile (99), (100) sînt identice, deci corelația (98) este involutivă. Punînd $c_{11} = u$, $c_{12} = c_{21} = v$, $c_{22} = w$ rezultă că putem defini corelațiile involutive de centru Ω și cu punctul singular tot Ω, prin formulele:

$$a_1 = ux_1 + vx_2, \ a_2 = vx_1 + wx_2, \ a = 1. \qquad (101)$$

Punctului A_1 (1, 0) îi corespunde prin această corelație dreapta

$$ux_1 + vx_2 + 1 = 0.$$

Dacă presupunem că am ales axa ΩA_2 paralelă cu această dreaptă, $v = 0$ și avem deci:

T e o r e m a 5. *Corelațiile involutive în planul α, avînd centrul confundat cu punctul singular, se pot aduce la forma canonică:*

$$a_1 = ux_1, \ a_2 = wx_2, \ a = 1, \qquad (102)$$

deci se poate alege sistemul de coordonate ΩA_1A_2, astfel încît punctului $P(x_1, x_2)$ să-i corespundă dreapta:

$$ux_1x'_1 + wx_2x'_2 + 1 = 0. \qquad (103)$$

Corelația (102) este nedegenerată dacă $uw \neq 0$.

Pentru corelația (102) joacă un rol important locul geometric al punctelor $P(x_1, x_2)$ ce aparțin dreptelor ce le corespund. Acest loc se obține punînd condiția ca ecuația (103) să fie verificată pentru $x'_1 = x_1$, $x'_2 = x_2$ și este dat de ecuația:

$$ux_1^2 + wx_2^2 + 1 = 0. \qquad (104)$$

Locul este deci o conică cu centrul în punctul Ω; această conică este o elipsă dacă:

$$u < 0, \quad w < 0;$$

o hiperbolă dacă:

$$u > 0, \ w < 0 \text{ sau } u < 0, \ w > 0$$

și este imaginară dacă avem:

$$u > 0, \quad w > 0.$$

În ultimul caz nu există puncte care să aparțină dreptelor corespondente lor.

Conica (104) se numește *conica directoare* a polarității (102), deoarece cunoașterea acestei conice face ca polaritatea să fie determinată. Imaginea d a unui punct P printr-o polaritate se mai numește *polara* acelui punct în raport cu conica directoare, iar P se numește *polul* dreptei d. Proprietatea caracteristică a corelațiilor involutive se poate exprima în felul următor: *polarele punctelor de pe o dreaptă d trec prin polul dreptei d.*

Polarele punctelor de pe conica directoare sînt tangente în aceste puncte la conica directoare. Fiind date două puncte A, B pe conica directoare, polarele lor, deci tangentele în A, B la conică, se întîlnesc în polul dreptei AB. Se obține de aici un procedeu simplu de construcție a polului unei drepte ce taie conica directoare, în două puncte, sau a polarei unui punct din care se pot duce două tangente la conica directoare.

§ 9. SPAȚIUL EUCLIDIAN METRIC

În spațiul euclidian afin raportul a două translații este definit numai dacă cele două translații sînt paralele. Raportul se poate considera fie ca o omotetie H, fie ca un număr real $x = x(H)$.

În geometria lui Euclid joacă un rol important faptul că se poate considera raportul a două translații oarecare. Această posibilitate are la bază faptul că există noțiunea de *mărime* a unei translații și deci se pot considera *translații neparalele de aceeași mărime*. Această noțiune se poate lega, la rîndul ei, de noțiunea de perpendicularitate: putem spune că translațiile T, T', definite de vectorii $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OA'}$ au aceeași mărime, dacă dreapta ce trece prin O și prin mijlocul segmentului $\overline{AA'}$ este perpendiculară pe acest segment. Apoi putem defini raportul a două translații T, T' ca raportul a două translații paralele S, S', avînd aceeași mărime cu T, respectiv T'.

Relația de perpendicularitate se poate caracteriza cu ajutorul următoarelor axiome:

1. Dacă dreapta d este perpendiculară pe dreapta d', atunci și dreapta d' este perpendiculară pe dreapta d.

2. Dacă dreptele d_1, d_2 sînt perpendiculare și dacă d_1' este paralelă cu d_1, atunci dreptele d_1', d_2 sînt perpendiculare.

3. Dreptele trecînd printr-un punct O și perpendiculare pe o dreaptă d aparțin unui plan α; orice dreaptă ce trece prin O și care este situată în planul α este perpendiculară pe dreapta d.

4. O dreaptă nu poate fi perpendiculară pe ea însăși.

Planul α dus prin O conform axiomei 3 se numește planul perpendicular în O pe dreapta d. Planele paralele cu α se numesc perpendiculare pe d. Dreptele conținute în aceste plane sînt perpendiculare toate pe dreapta d.

Din axiomele precedente se deduc fără dificultate următoarele propoziții, a căror demonstrație o lăsăm în grija cititorului:

P r o p o z i ț i a 1. Dacă o dreaptă d este perpendiculară pe două drepte concurente (și distincte) dintr-un plan α, atunci d este perpendiculară pe planul α și deci pe orice dreaptă din planul α.

P r o p o z i ț i a 2. Prin fiecare punct O al spațiului trece un plan și numai unul, perpendicular pe o dreaptă dată.

P r o p o z i ț i a 3. Dacă un plan α este perpendicular pe o dreaptă d, atunci α nu conține dreapta d și nu este paralel cu d, deci α și d au un singur punct comun.

P r o p o z i ț i a 4. Prin fiecare punct O al spațiului trece o dreaptă și numai una, perpendiculară pe un plan dat α; această dreaptă este intersecția a două plane trecînd prin O și perpendiculare pe două drepte concurente (și distincte) din planul α.

P r o p o z i ț i a 5. Două drepte perpendiculare pe un același plan sînt paralele.

P r o p o z i ț i a 6. Două plane perpendiculare pe o aceeași dreaptă sînt paralele.

P r o p o z i ț i a 7. Dacă o dreaptă d este perpendiculară pe un plan α, atunci d este paralelă cu planele ce sînt perpendiculare pe cîte o dreaptă din planul α.

Un spațiu euclidian afin în care s-a introdus noțiunea de perpendicularitate, se numește spațiul lui Euclid, iar proprietățile lui formează *geometria elementară* sau *geometria lui Euclid.*

Dacă în această geometrie s-a ales o clasă de translații de o aceeași mărime, atunci se poate defini *distanța* între două puncte și se obține *spațiul metric euclidian.*

Cu ajutorul acestor axiome putem introduce în spațiu — *sisteme de coordonate carteziene ortogonale* $\Omega A_1A_2A_3$, în care axele ΩA_1, ΩA_2, ΩA_3 sînt perpendiculare două cîte două, și în care translațiile S_1, S_2, S_3, definite de vectorii $\overrightarrow{\Omega A_1}$, $\overrightarrow{\Omega A_2}$, $\overrightarrow{\Omega A_3}$, au aceeași mărime. Păstrînd această mărime pentru orice alt sistem de coordonate carteziene ortogonale, se arată că transformările de coordonate carteziene ortogonale sînt date de formule de forma:

$$x_i' = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + c_{i3}x_3 + c_i, \quad (i = 1, 2, 3),$$

unde matricea $\|c_{ij}\|$ este ortogonală, deci verifică condiţiile:

$$c_{i1}c_{j1}+c_{i2}c_{j2}+c_{i3}c_{j3}=\begin{cases}0, \text{ dacă } i\neq j;\\ 1, \text{ dacă i } = j.\end{cases}$$

Rezultă că dacă două puncte P, Q au într-un sistem de coordonate ortogonale coordonatele x_1, x_2, x_3, respectiv y_1, y_2, y_3, atunci expresia

$$d^2=(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2$$

nu depinde de sistemul de coordonate ortogonale ales. Ajungem astfel la noţiunea de *distanţă euclidiană* şi *geometria metrică* a lui Euclid se poate considera construită. Spaţiul acestei geometrii se numeşte *spaţiul metric euclidian*.

Să demonstrăm afirmaţiile făcute mai sus. Pentru aceasta vom căuta să găsim condiţia analitică pentru ca două drepte să fie perpendiculare.

Fie pentru aceasta S un punct fix în spaţiu, α un plan ce nu conţine punctul S. Putem considera perpendiculara δ pe planul α (fig. 104).

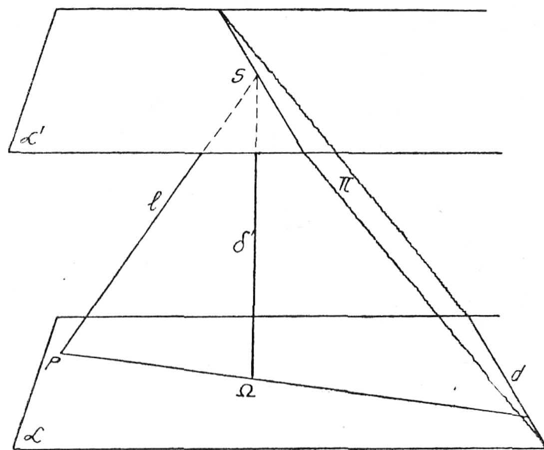


Fig. 104

Dreapta δ este perpendiculară pe orice dreaptă din planul α.
Dreapta δ intersectează planul α într-un punct Ω.

Fie α' planul paralel cu planul α şi trecînd prin punctul S. Să asociem fiecărui punct P din planul α, diferit de punctul Ω, planul π dus prin S perpendicular pe dreapta PS. Planul π este diferit de planul α', deci π intersectează planul α după o dreaptă d. Dreapta d nu trece

prin punctul Ω. Într-adevăr, dacă planul π ar conţine punctul Ω, dreapta SP ar fi perpendiculară pe dreapta $S\Omega$, ceea ce nu este posibil, deoarece dreptele perpendiculare pe dreapta $S\Omega$ sînt paralele cu planul α sau aparţin acestui plan, conform axiomei 3. Or, dreapta PS nu este nici paralelă cu planul α, nici conţinută în acest plan, avînd un punct P în planul α şi un punct S exterior planului α.

Vom arăta că asociind fiecărui punct $P\in\alpha$ dreapta $d=\pi\cap\alpha$, obţinem o polaritate cu centrul Ω, avînd conica directoare imaginară. Să observăm pentru aceasta că orice dreaptă d, ce nu trece prin punctul Ω, corespunde unui punct P. Într-adevăr, dreapta d, împreună cu punctul S, defineşte un plan π, diferit de α'. Perpendiculara l pe acest plan dusă prin S va intersecta planul α într-un punct P. Dreapta l nu poate fi paralelă cu planul α, deoarece în caz contrar, l s-ar găsi în planul α' şi atunci planul π, deci şi dreapta d, ar conţine punctul Ω, contrar ipotezei.

Să presupunem acum că un punct Q descrie dreapta d în planul α; atunci dreptele QS formează un plan π. Dreapta l construită mai sus, perpendiculară pe planul π, va fi perpendiculară pe orice dreaptă QS din acest plan. Rezultă că planele π', perpendiculare în S pe dreptele QS, trec prin P, deci şi intersecţiile d' ale planelor π' cu planul α trec prin P. Deci am arătat că dacă un punct Q descrie o dreaptă d în planul α, atunci dreptele d' corespunzătoare punctelor Q trec prin punctul P, a cărui transformată este tocmai dreapta d.

Din consideraţiile precedente rezultă că transformarea ω, ce asociază punctelor P din planul α dreptele d, prin construcţia indicată mai sus, este o polaritate de centru Ω în planul α.

Deci alegînd un sistem de coordonate convenabil în planul α, de forma ΩA_1A_2, putem face ca transformarea ω să fie definită de formulele (39). Dar punctul P nu poate aparţine niciodată dreptei $d=\omega\,(P)$, deoarece dreapta PS nu poate fi perpendiculară pe ea însăşi, conform axiomei 4. Rezultă că avem, în formulele (102), $u>0$, $w>0$. Atunci există două numere reale p, q, astfel încît să avem $u=p^2$, $w=q^2$ şi ecuaţiile (102) se pot scrie:

$$a_1=p^2x_1,\quad a_2=q^2x_2,\quad a=1.$$

Prin transformarea de coordonate

$$y_1=px_1,\quad y_2=qx_2,$$

aceste ecuaţii devin:

$$b_1=y_1,\quad b_2=y_2,\quad b=1,$$

deci ω asociază punctului $P(y_1, y_2)$, dreapta

$$y_1y_1' + y_2y_2' + 1 = 0. \qquad (105)$$

Vom nota cu A_1, A_2 punctele unitate ale noului sistem de coordonate.

Să introducem în spaţiu sistemul de coordonate definit de reperul ΩA_1A_2S. Atunci punctul S are coordonatele (0, 0, 1). O dreaptă care trece prin S şi nu este paralelă cu planul α are ecuaţii parametrice de forma

$$x_1 = p_1t,\ x_2 = p_2t,\ x_3 = p_3t + 1,\ (p_3 \neq 0).$$

O astfel de dreaptă d intersectează planul α în punctul pentru care $x_3 = 0$, deci $t = -\frac{1}{p_3}$. Deci primele două coordonate ale punctului P de intersecţie sînt:

$$y_1 = -\frac{p_1}{p_3},\quad y_2 = -\frac{p_2}{p_3}.$$

O a doua dreaptă d', de acelaşi fel,

$$x_1 = p_1't,\ x_2 = p_2't,\ x_3 = p_3't + 1,\ (p_3' \neq 0)$$

va intersecta planul α în punctul P' avînd primele două coordonate

$$y_1' = -\frac{p_1'}{p_3'},\quad y_2' = -\frac{p_2'}{p_3'}.$$

Dreptele d, d' sînt perpendiculare, dacă punctele $P(y_1, y_2)$, $P'(y_1', y_2')$ verifică ecuaţia (105), deci dacă avem:

$$p_1p_1' + p_2p_2' + p_3p_3' = 0. \qquad (106)$$

Am obţinut deci condiţia pe care trebuie s-o verifice parametrii directori a două drepte d, d', pentru ca aceste drepte să fie perpendiculare, presupunînd că d, d' nu sînt paralele cu planul α.

Dacă dreapta d' este în planul α' (fig. 105), d' defineşte împreună cu δ un plan σ, ce intersectează planul α după o dreaptă d, paralelă cu d'. Fie m perpendiculara ridicată în Ω pe planul σ. Deoarece σ conţine dreapta δ, m se găseşte în planul α, care conţine toate perpendicularele duse prin Ω la dreapta δ. Dreapta d' fiind perpendiculară pe dreptele δ, m va fi perpendiculară pe planul π definit în aceste drepte şi orice perpendiculară pe dreapta d' trecînd prin S va fi conţinută în planul π.

Să presupunem că dreapta d' este definită de ecuaţiile parametrice

$$x_1 = p_1t,\ x_2 = p_2t,\ x_3 = 1.$$

Un punct P de pe dreapta d, paralelă cu d', va avea coordonatele de forma:

$$y_1 = p_1t,\ y_2 = p_2t,\ y_3 = 0.$$

Dreapta m' de intersecţie a planelor α', π este paralelă cu m, deci este perpendiculară pe planul σ; în particular m' este perpendiculară pe dreapta PS. Rezultă că m' se găseşte în planul β dus prin S perpendicular pe dreapta PS. Planul β intersectează planul α după o dreaptă n, paralelă cu m şi m'. Deci putem afla parametrii directori ai dreptei m', aflînd parametrii directori ai dreptei n.

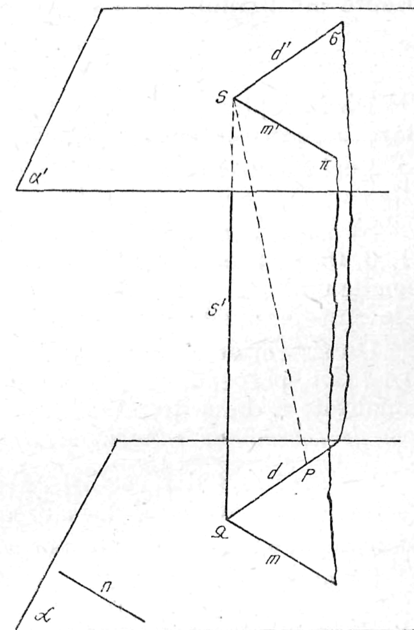


Fig. 105

Dreapta n este transformata punctului P prin polaritatea (105). Deci n are ecuaţiile

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \frac{1}{t} = 0,\ x_3 = 0$$

şi rezultă că n sau m' are parametrii directori $-p_2$, p_1, 0.

Am arătat că dreptele perpendiculare pe dreapta d' sînt dreptele paralele cu planul π. Dintre acestea, dreptele paralele cu m au parametrii directori:

$$p = -p_2,\ p_2' = p_1,\ p_3' = 0,$$

care verifică împreună cu p_1, p_2, p_3 ecuaţia (106). Celelalte drepte, perpendiculare pe d' şi neparalele cu m, sînt paralele cu drepte de forma SM, M fiind un punct pe dreapta m, care este definită de ecuaţiile parametrice

$$x_1 = -p_2t,\ x_2 = p_1t,\ x_3 = 0.$$

Aceste drepte au parametrii directori de forma:

$$p_1' = -p_2,\ p = p_1,\ p_3' = \text{arbitrar}$$

şi ele verifică împreună cu p_1, p_2, p_3 ecuaţia (106). Deci această ecuaţie constituie *condiţia de perpendicularitate a două drepte oarecare în spaţiu.*

Condiţia de perpendicularitate a dreptei

$$x_1 = p_1 t + q_1, \quad x_2 = p_2 t + q_2, \quad x_3 = p_3 t + q_3 \tag{107}$$

cu planul

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u = 0 \tag{107'}$$

se poate obţine ţinînd seama că parametrii directori p_1', p_2', p_3' ai unei drepte din planul (107') verifică ecuaţia:

$$u_1 p_1' + u_2' p_2' + u_3' p_3' = 0.$$

Deci dreptele planului (107') sînt toate perpendiculare pe dreapta de parametri directori (u_1, u_2, u_3).

Deci *condiţia ca dreapta* (107) *să fie perpendiculară pe planul* (107') *este ca* p_1, p_2, p_3 *să fie egali sau proporţionali cu* u_1, u_2, u_3.

Să observăm acum că axele ΩA_1, ΩA_2 au parametrii director (1, 0, 0), respectiv (0,1,0) şi aceşti parametri verifică condiţia de peri pendicularitate (106). Deci dreptele ΩA_1, ΩA_2 sînt perpendiculare. Ele sînt perpendiculare şi pe dreapta ΩA_3, prin construcţie.

Un sistem de coordonate carteziene în spaţiu, format din axe ΩA_1, ΩA_2, ΩA_3 perpendiculare două cîte două, astfel încît condiţia de ortogonalitate a două drepte să fie dată de ecuaţia (106), se numeşte *sistem de coordonate carteziene ortogonale.*

Fie $\overrightarrow{\Omega A}$, $\overrightarrow{\Omega B}$ doi vectori cu originea în Ω. Vom spune că aceşti vectori sînt *congruenţi*, dacă dreapta ce uneşte punctul Ω cu mijlocul M al segmentului $\overline{AB}$ este perpendiculară pe segmentul $\overline{AB}$.

Să presupunem că A, B au coordonatele x_1, x_2, x_3 respectiv y_1, y_2, y_3. Atunci M are coordonatele $\frac{x_1+y_1}{2}, \frac{x_2+y_2}{2}, \frac{x_3+y_3}{2}$ şi dreapta ΩM are parametrii directori x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3. Dreapta AB are parametrii directori $y_1 - x_1$, $y_2 - x_2$, $y_3 - x_3$. Condiţia de perpendicularitate se scrie:

$$(x_1 + y_1)(y_1 - x_1) + (x_2 + y_2)(y_2 - x_2) + (x_3 + y_3)(y_3 - x_3) = 0$$

sau

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2.$$

Rezultă de aici că vectorii $\overrightarrow{\Omega A_1}$, $\overrightarrow{\Omega A_2}$, $\overrightarrow{\Omega A_3}$ sînt congruenţi.

Să presupunem acum că avem trei drepte ΩA_1, ΩA_2, ΩA_3 perpendiculare două cîte două şi punctele A_1, A_2, A_3 alese astfel, încît vectorii

$\overrightarrow{\Omega A_1}$, $\overrightarrow{\Omega A_2}$, $\overrightarrow{\Omega A_3}$ să fie congruenţi cîte doi. Condiţia de ortogonalitate a două drepte rezultă din (39) sub forma:

$$u p_1 p_1' + w p_2 p_2' + 1 = 0,$$

deci condiţia de congruenţă a vectorilor $\overrightarrow{\Omega A}$, $\overrightarrow{\Omega B}$ se scrie sub forma:

$$u(x_1 + y_1)(x_1 - y_1) + w(x_2 + y_2)(x_2 - y_2) + (x_3 + y_3)(x_3 - y_3) = 0$$

sau:

$$u(x_1^2 - y_1^2) + w(x_2^2 - y_2^2) + (x_3^2 - y_3^2) = 0.$$

Dacă această condiţie este verificată de vectorii $\overrightarrow{\Omega A_1}$, $\overrightarrow{\Omega A_2}$ şi $\overrightarrow{\Omega A_1}$, $\overrightarrow{\Omega A_3}$, avem:

$$u - w = 0, \quad u - 1 = 0,$$

deci, $u = w = 1$.

Rezultă că un sistem de coordonate carteziene ortogonale se mai poate defini prin condiţia ca axele sistemelor să fie ortogonale cîte două, iar vectorii unitari ai axelor să fie congruenţi.

Putem defini congruenţa a doi vectori u, v oarecare în spaţiu prin condiţia ca vectorii echipolenţi cu u, v şi avînd originea într-un punct Ω să fie congruenţi. Dacă vectorii u, v au componentele u_1, u_2, u_3, respectiv v_1, v_2, v_3, faţă de un sistem de coordonate carteziene ortogonale, condiţia de congruenţă se poate scrie sub forma:

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2.$$

Să presupunem că vectorii $\overrightarrow{\Omega' A_1'}$, $\overrightarrow{\Omega' A_2'}$, $\overrightarrow{\Omega' A_3'}$ definesc un al doilea sistem de coordonate carteziene ortogonale în spaţiu. Atunci notînd cu c_{1i}, c_{2i}, c_{3i} componentele vectorilor $\overrightarrow{\Omega' A_i'}$ $(i = 1, 2, 3)$, avem condiţiile de ortogonalitate ale acestor vectori,

$$c_{1i} c_{1j} + c_{2i} c_{2j} + c_{3i} c_{3j} = 0, \quad (i \neq j) \tag{108}$$

şi condiţiile de congruenţă

$$c_{1i}^2 + c_{2i}^2 + c_{3i}^2 = p^2, \quad (i = 1, 2, 3) \tag{109}$$

p fiind un număr real nenul arbitrar. Dacă vectorii $\overrightarrow{\Omega' A_i'}$ sînt congruenţi cu vectorii $\overrightarrow{\Omega A_i}$, avem $p = 1$.

Dacă alegem un vector fix u în spațiu, putem considera clasa sistemelor de coordonate ortogonale, pentru care vectorii unitari ai axelor sînt congruenți cu vectorul u. Trecerea de la un sistem de coordonate din această clasă la altul se va face prin formule de forma (91), unde c_{ij} verifică condițiile (108), (109), în care $p = 1$.

Să observăm că fiind dată o dreaptă ΩP există pe dreapta ΩP numai două puncte P_1, P_2, astfel încît vectorii $\overrightarrow{PP_1}$, $\overrightarrow{PP_2}$ să fie congruenți cu un vector dat $u(u_1, u_2, u_3)$. Într-adevăr, dacă P are coordonatele q_1, q_2, q_3, putem să definim dreapta d prin ecuațiile parametrice:

$$x_1 = p_1t + q_1,\ x_2 = p_2t + q_2,\ x_3 = p_3t + q_3;$$

dacă t corespunde punctului P_1 condiția de congruență a vectorilor $\overrightarrow{PP_1}$, u se scrie:

$$(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)t^2 = u_1 + u_2^2 + u_3^2$$

și dă două valori de semne opuse pentru t. Rezultă că avem două soluții P_1, P_2 și că vectorii $\overrightarrow{PP_1}$, $\overrightarrow{PP_2}$ au sensurile opuse.

Se spune că vectorii $\overrightarrow{PP_1}$, $\overrightarrow{PP_2}$ constituie *purtările congruente* ale vectorului u, pe dreapta ΩP, cu originea în P.

Dacă u este un vector fix, putem defini *lungimea* unui vector arbitrar v ca raport al vectorului v_1, purtat congruent pe suportul lui u și avînd același sens cu u, prin vectorul u însuși. Dacă vectorul u are componentele u_1, u_2, u_3, suportul său se poate defini prin ecuații de forma:

$$x_1 = u_1t + a_1, \quad x_2 = u_2t + a_2, \quad x_3 = u_3t + a_3.$$

Purtarea congruentă a vectorului v (v_1, v_2, v_3) pe această dreaptă și cu originea în punctul de coordonate a_1, a_2, a_3, este definită de ecuația în t,

$$(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)t^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2,$$

și rezultă că lungimea vectorului v este dată de formula:

$$l^2 = \frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

Dacă u este unul din vectorii $\overrightarrow{\Omega A_i}$, obținem pentru lungimea lui v formula:

$$l^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2.$$

Distanța $d(A, B)$ între două puncte A, B se definește ca lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}$. Dacă A, B au coordonatele (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3), rezultă:

$$d(A, B)^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2.$$

Dacă avem dreptele perpendiculare AB, AC, unde punctele A, B, C au coordonatele (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3), condiția de perpendicularitate se scrie:

$$(x_1 - y_1)(x_1 - z_1) + (x_2 - y_2)(x_2 - z_2) + (x_3 - y_3)(x_3 - z_3) = 0$$

sau sub forma echivalentă:

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + (x_1 - z_1)^2 + $$
$$+ (x_2 - z_2)^2 + (x_3 - z_3)^2 = (y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2 + (y_3 - z_3)^2$$

sau:

$$d(A, B)^2 + d(A, C)^2 = d(B, C)^2.$$

Am obținut astfel formula lui Pitagora.

§ 10. AXIOMATIZAREA LUI HILBERT. AXIOMATIZAREA GEOMETRIILOR NEEUCLIDIENE

Axiomatizarea dată de noi este simplă datorită faptului că am introdus de la început postulatul lui Euclid, prin ultima axiomă a spațiului afin. În acest fel am exclus de la început geometria lui Lobacevski și geometria lui Riemann.

Axiomatizarea lui Hilbert, menționată în primul capitol al acestei lucrări, are la bază un sistem de douăzeci de axiome, din care opt axiome de incidență, cinci de congruență, și una de completitudine sînt comune celor trei geometrii: eliptică, hiperbolică și parabolică. Geometria hiperbolică admite de asemenea cele patru axiome de ordonare din sistemul lui Hilbert și axioma de continuitate a lui Hilbert, ultima axiomă, de paralelism, fiind singura care trebuie modificată cînd trecem de la geometria lui Euclid la geometria lui Lobacevski. De aceea, axiomatizarea lui Hilbert, deși incomodă în ce privește deducerea teoremelor, prezintă un interes deosebit.

Sistemul lui Hilbert consideră ca elemente primitive noțiunile de punct, dreaptă, plan și relațiile dintre ele: de incidență, ordonare și congruență. Relațiile de incidență se exprimă prin: un punct aparține unei drepte, un punct aparține unui plan, o dreaptă aparține unui

plan. Ordonarea se referă la situaţia descrisă prin propoziţia: un punct B se află între două puncte A, C şi are ca noţiuni derivate noţiunile de semidreaptă, segment, semiplan, unghi etc. Relaţiile de congruenţă leagă între ele anumite perechi de segmente sau unghiuri, numite perechi de segmente sau unghiuri congruente (egale). Vom da axiomele care caracterizează aceste relaţii, după Hilbert[1].

Axiomele de incidenţă

1. Prin două puncte trece totdeauna o dreaptă.
2. Prin două puncte distincte trece o singură dreaptă.
3. Orice dreaptă conţine cel puţin două puncte. Există trei puncte nesituate pe aceeaşi dreaptă.
4. Prin trei puncte nesituate pe aceeaşi dreaptă trece un plan. Orice plan conţine cel puţin un punct.
5. Prin trei puncte nesituate pe aceeaşi dreaptă trece un singur plan.
6. Dacă o dreaptă are două puncte situate într-un plan, atunci toate punctele dreptei aparţin planului.
7. Dacă două plane trec printr-un punct, atunci ele mai trec printr-un al doilea punct.
8. Există patru puncte nesituate în acelaşi plan.

Axiomele de ordonare

1. Dacă punctul B se găseşte între punctele A, C, atunci punctele A, B, C sînt pe aceeaşi dreaptă, sînt distincte şi B se găseşte între C şi A.
2. Fiind date două puncte distincte A, B există un punct C, astfel încît B să se găsească între A şi C.
3. Fiind date trei puncte coliniare distincte A, B, C, dacă A se află între B, C atunci C nu se află între A, B, şi nici B nu se află între A, C.
4. (Axioma lui Pash). Fiind date trei puncte nesituate pe aceeaşi dreaptă A, B, C şi o dreaptă d în planul lor ce nu trece prin nici unul din aceste puncte, dacă dreapta d trece printr-un punct situat între A, B, atunci ea trece cu siguranţă printr-un punct situat între A, C sau printr-un punct situat între B, C.

Axiomele de congruenţă

1. Fiind dat un segment $\overline{AB}$, o dreaptă d şi un punct O pe dreapta d, există pe dreapta d exact două puncte P_1, P_2, astfel încît să avem $\overline{OP_1} \equiv \overline{AB}$, $\overline{OP_2} \equiv \overline{AB}$. Punctul O se găseşte între punctele P_1, P_2.

[1] David Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig und Berlin, 1930.

2. Două segmente congruente cu al treilea sînt congruente între ele.
3. Dacă B este între A, C, dacă B' este între A', C', şi dacă sînt verificate congruenţele $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$, atunci este adevărată şi congruenţa $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$.
4. Fiind dat un unghi (h, k) şi o semidreaptă h' într-un plan α, există în planul α exact două semidrepte k_1, k_2, care să formeze cu h' unghiuri congruente cu unghiul (h, k). Semidreptele k_1, k_2 sînt de o parte şi de alta a dreptei ce conţine semidreapta h'.

Orice unghi este congruent cu el însuşi.

4. Fiind date două triunghiuri ABC, $A'B'C'$, din congruenţele

$$\hat{A} \equiv \hat{A}', \quad \overline{AB} \equiv \overline{A'B'}, \quad \overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$$

rezultă:

$$\hat{B} = \hat{B}'.$$

La aceste axiome se adaugă convenţiile: punctele A, B şi B, A definesc acelaşi segment; semidreptele h, k şi k, h definesc acelaşi unghi.

Din axiomele precedente rezultă un număr însemnat de teoreme remarcabile, comune geometriei lui Euclid şi geometriei lui Lobacevski. Dintre acestea, menţionăm teorema unghiului exterior şi teoremele de congruenţă ale triunghiurilor. De asemenea, se poate arăta că dintr-un punct la o dreaptă se poate duce o perpendiculară şi numai una şi cel puţin o paralelă. Se mai arată că toate unghiurile drepte sînt congruente. În sistemul lui Hilbert, ca şi la Euclid, două drepte se numesc perpendiculare dacă formează patru unghiuri congruente şi aceste unghiuri se numesc drepte.

Axiomele de continuitate

1. Axioma lui Arhimede.
2. Axioma lui Cantor-Dedekind, sau axioma de completitudine echivalentă cu ea: nu putem adăuga puncte, drepte şi plane noi, astfel încît axiomele precedente să fie verificate.

Axioma de paralelism

Printr-un punct exterior unei drepte nu se poate duce mai mult de o paralelă la acea dreaptă.

Ultima axiomă are drept consecinţă posibilitatea introducerii coordonatelor, măsurării segmentelor, cu ajutorul formulei lui Pitagora, şi teoremei lui Tales.

O măsurare a segmentelor se poate face fără axioma de paralelism, cu ajutorul axiomei lui Arhimede, ceea ce permite calculul distanțelor și unghiurilor și în geometria lui Lobacevski. Tot cu axioma lui Arhimede, fără a folosi axioma paralelelor, se arată că suma unghiurilor unui triunghi nu poate fi mai mare decît suma a două unghiuri drepte.

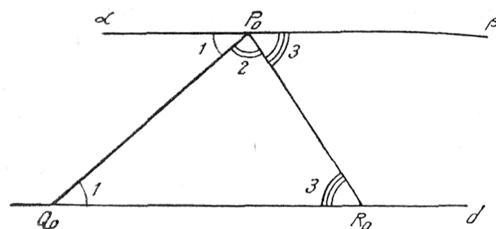


Fig. 106

Mai mult, dacă într-un singur triunghi suma unghiurilor este egală cu suma a două unghiuri drepte, teorema lui Legendre arată că orice triunghi are aceeași proprietate. De aici rezultă că dacă există un punct P_0 și o dreaptă d_0 astfel încît prin P_0 să nu treacă decît o paralelă la dreapta d_0 (fig. 106), atunci prin orice punct P nu se poate duce decît o paralelă la o dreaptă d ce nu trece prin P. Să demonstrăm această proprietate. Fie Q_0, R_0 două puncte pe dreapta d_0; prin P_0 să ducem semidreptele α, β care fac cu $\overline{P_0Q_0}$, $\overline{P_0R_0}$ unghiuri congruente cu unghiurile avînd vîrfurile în Q_0, respectiv R_0. Din teorema unghiului exterior rezultă că dreptele ce conțin semidreptele α, β nu întîlnesc dreapta d_0. Cum prin P_0 am presupus că trece o singură paralelă, rezultă că α, β sînt în prelungire și atunci suma unghiurilor 1, 2, 3 din P_0 este egală cu suma a două unghiuri drepte. Deci există un triunghi în care suma unghiurilor este egală cu suma a două unghiuri drepte. Teorema lui Legendre spune atunci că orice alt triunghi are aceeași proprietate. Fie PQ perpendiculara dusă dintr-un punct P la o dreaptă d ce nu trece prin P și fie R un punct pe dreapta d, astfel ca $\overline{QR} \equiv \overline{PQ}$. Dacă prin P trec mai multe paralele la d, una din ele, să spunem δ, va forma cu PQ un unghi mai mic decît un unghi drept. Să luăm pe dreapta d, de aceeași parte a lui Q, segmentul $\overline{RR_1}$, congruent cu $\overline{PR}$, apoi în prelungire segmentele $\overline{R_1R_2}$, $\overline{R_2R_3}$,... congruente respectiv cu $\overline{PR_1}$, $\overline{PR_2}$, ...; se formează triunghiurile isoscele PQR, PRR_1, PR_1R_2, ... (fig. 107). În fiecare din aceste triunghiuri, suma unghiurilor este de două unghiuri drepte. Un calcul simplu arată că unghiurile din P ale acestor triunghiuri au valorile:

$$\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{4}, \frac{\omega}{8}, \ldots, \frac{\omega}{2^n}, \ldots$$

unde am notat cu ω unghiul drept. Notînd cu $\omega - \varepsilon$ unghiul format de δ și PQ, din faptul că toate semidreptele PR, PR_1 PR_2 ..., sînt

cuprinse în interiorul acestui unghi, rezultă că avem:

$$\frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{4} + \ldots + \frac{\omega}{2^n} < \omega - \varepsilon,$$

oricare ar fi numărul natural n. Dar această relație este imposibilă, deoarece suma din membrul stîng tinde spre ω, deci poate să se apropie de ω, pentru n suficient de mare, astfel încît semidreapta PR_n să depășească semidreapta δ. Am ajuns deci la o contradicție, care arată că prin punctul P nu trece decît o paralelă la dreapta d.

Geometria eliptică a lui Riemann se deosebește de geometriile hiperbolică și parabolică în primul rînd prin proprietatea că dreptele sînt aici curbe închise, care se pot identifica cu cercuri. Într-adevăr, dreptele geometriei eliptice sînt drepte proiective, care se pot obține din drepte euclidiene adăugînd un singur punct la infinit. Figura 108 arată cum se poate stabili o corespondență biunivocă între punctele dreptei proiective și punctele unui cerc, prin proiecție dintr-un punct O al cercului. Cînd punctele Q_1, Q_2 ale dreptei tind la stînga, respectiv la dreapta către punctul de la infinit, punctele P_1, P_2 tind către

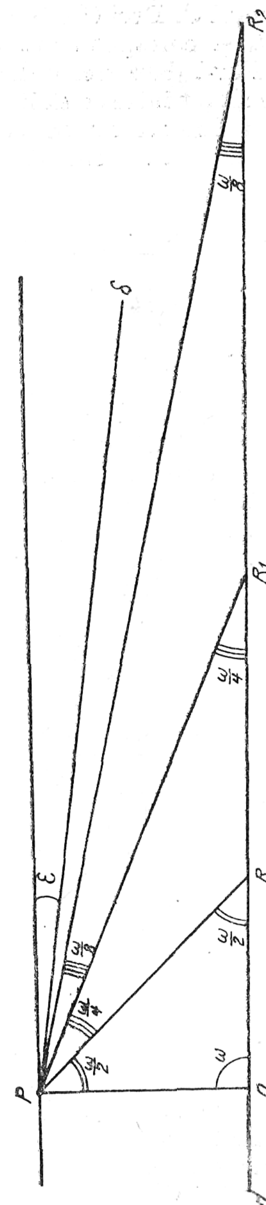


Fig. 107

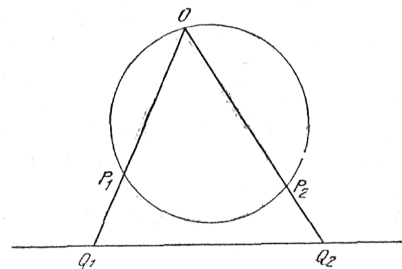


Fig. 108

punctul O. Deci O este corespondentul punctului de la infinit al dreptei Q_1Q_2 și corespondența este continuă în punctul O.

Fiind date trei puncte pe un cerc, nu se poate spune care din ele este situat între celelalte două (fig. 109), deci axioma a treia de ordonare a lui Hilbert nu se verifică în geometria lui Riemann. În această geometrie are sens să considerăm perechi de puncte (A, B), (C, D)

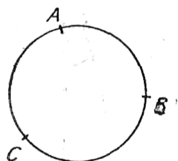


Fig. 109

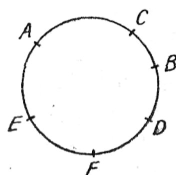


Fig. 110

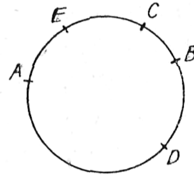


Fig. 111

care se separă (fig. 110) și perechi (A, B), (E, F) care nu se separă. Proprietatea de separare a două perechi se poate caracteriza prin următoarele axiome[1]:

1. Există o dreaptă ce conține patru puncte distincte.

2. Dacă A, B, C, D sînt puncte diferite ale unei drepte, unul singur dintre punctele B, C, D formează cu punctul A o pereche se separă perechea formată din celelalte două puncte rămase.

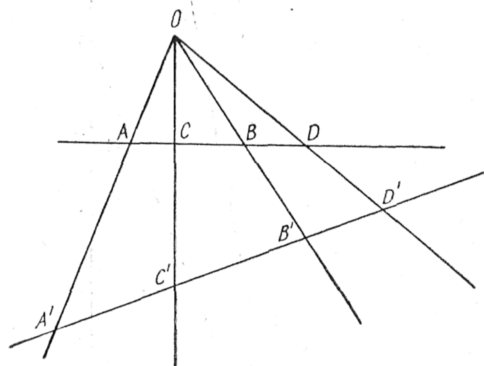


Fig. 112

3. Dacă perechea (A, B) separă perechea (C, D) și dacă (A, C) separă perechea (B, E), atunci (A, B) separă perechea (D, E) (fig. 111).

4. Dacă A', B'', C', D', sînt proiecțiile punctelor A, B, C, D, pe o dreaptă d' dintr-un punct O, și dacă (A, B) separă pe (C, D) atunci (A', B') separă pe (C', D') (fig. 112).

De asemenea, proprietatea de separare o presupunem simetrică, deci dacă (A, B) separă pe (C, D), atunci și (C, D) separă pe (A, B). Două puncte A, B pe un cerc sau pe dreapta proiectivă definesc două segmente complementare.

Fiind date trei puncte distincte A, B, C vom numi segment $\overline{AB}_C$ mulțimea punctelor D care formează cu C perechi ce separă perechea (A, B).

[1] C o x e t e r H. S. M., *The Real Projective Plane*, Cambridge, 1955.

Pentru a putea introduce axioma continuității, ce se datorește lui Coxeter, vom introduce noțiunea de *corespondență ordonată* pe o dreaptă. Înțelegem prin aceasta o corespondență biunivocă a unei drepte proiective pe ea însăși, care transformă perechi ce se separă în perechi ce se separă.

Axioma lui Coxeter se poate enunța în felul următor:

Fie T o corespondență ordonată pe dreapta AB.

Dacă segmentul $\overline{AB}_C$ conține punctele A', B', atunci segmentu $\overline{A'B'}_C$ conține un punct fix M al corespondenței, astfel încît segmentul $\overline{AM}_B$ nu conține nici un punct fix al aceleiași corespondențe (fig. 113).

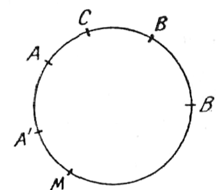


Fig. 113

Axiomele de congruență ale lui Hilbert se pot adapta la cadrul dat de axiomele de ordonare ale planului eliptic.

Să observăm că axioma de paralelism are în geometria eliptică următorul enunț:

Oricare două drepte coplanare au cel puțin un punct comun.

§ 11. SPAȚII AFINE CU MAI MULTE DIMENSIUNI

Construcția geometriei lui Euclid dezvoltată în acest capitol s-a făcut în trei etape. Prima etapă a constituit-o construcția corpului coordonatelor, utilizînd axiomele de incidență și descrierea analitică a dreptelor, planelor și automorfismelor spațiului afin. A doua etapă a constat în restrîngerea corpului coordonatelor cu ajutorul axiomelor de ordonare și continuitate. Iar a treia etapă a constat în restrîngerea grupului automorfismelor, cu ajutorul noțiunii de perpendicularitate.

Aceste etape pot fi generalizate, dacă înlocuim axiomele de incidență prin axiome mai slabe. Se obțin atunci spații afine cu mai multe dimensiuni și spații euclidiene cu mai multe dimensiuni, pe care le vom numi *spații generalizate*.

Anume vom înlocui sistemul de axiome de incidență al spațiului afin, lăsînd de o parte axiomele 4,8 și punînd în locul lor trei propoziții ce le-am dedus cu ajutorul axiomelor 4,8 și care au servit la demonstrarea teoremei speciale a lui Desargues. Deci vom defini spațiul afin prin axiomele 1, 2, 3, 5, 6, 7 de incidență și prin axiomele:

4'. Dacă două drepte AB, AC sînt paralele cu două drepte concurente dintr-un plan α, atunci planul definit de punctele A, B, C nu are nici un punct comun cu planul α și conține toate paralele duse prin A la dreptele planului α.

8'. Fiind dat un punct P și o dreaptă d într-un plan α, există o paralelă prin P la dreapta d, deci o dreaptă d, trecînd prin P, situată în planul α și nesecantă cu dreapta d. Două drepte în spațiu paralele cu aceeași dreaptă sînt paralele între ele sau confundate.

Cititorul poate vedea ușor că demonstrația teoremei speciale a lui Desargues se poate reface folosind axiomele 1, 2, 3, 4', 5, 6, 7, 8'. Atunci putem defini translațiile și omotetiile în spațiul afin generalizat și putem construi corpul coordonatelor.

Se numește *subspațiu liniar* al spațiului afin generalizat, orice mulțime de puncte din acest spațiu, care o dată cu două puncte A, B conține toate punctele dreptei AB. Din axioma 3 rezultă că planele sînt subspații liniare. Intersecția mai multor subspații liniare este un subspațiu liniar. Fiind date mai multe puncte A, B, C, ... în spațiul afin generalizat, se numește subspațiu liniar generat de aceste puncte intersecția tuturor subspațiilor liniare ce le conțin.

Se numește *sistem de coordonate carteziene în spațiul afin generalizat* un sistem de puncte Ω, A_1, A_2, ..., A_n, ... avînd următoarele proprietăți:

1. Punctele Ω, A_1, A_2, ... generează spațiul întreg.
2. Dacă din punctele A_1, A_2, ... se scoate un punct oarecare, sistemul de puncte rămas nu mai generează spațiul întreg.

Dacă punctele sistemelor de coordonate sînt în număr finit, de exemplu $n + 1$, se spune că spațiul afin are dimensiunea n. În caz contrar, se spune că avem un spațiu afin de dimensiune infinită.

Înt-un spațiu de dimensiune finită se pot introduce coordonatele ca în cazul $n = 3$. Fiind dat un punct oarecare P, ducem prin P paralela la axa ΩA_n, care intersectează spațiul liniar generat de Ω, A_1, ..., A_{n-1} în P'. Prin P' ducem paralela la ΩA_{n-1}, care intersectează spațiul liniar generat de $\Omega, A_1, \ldots, A_{n-2}$ în P''; continuînd procedeul, ajungem la un punct P_1 al axei A_1. Raportul translațiilor definite de vectorii $\overrightarrow{\Omega P_1}$, $\overrightarrow{\Omega A_1}$ este prin definiție coordonata X_1 a punctului P_1. Coordonatele X_2, ..., X_n se definesc schimbînd rolul axei ΩA_1. O dreaptă se poate atunci defini prin ecuațiile parametrice:

$$x_i = p_i t + q_i, \ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dacă avem un sistem de coordonate carteziene $\Omega A_1 A_2 \ldots$ într-un spațiu infinit dimensional, orice punct P al acestui spațiu se găsește într-un subspațiu liniar definit de un număr finit de puncte $\Omega, A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}$. Coordonatele lui P se definesc atunci ca mai sus pentru indicii i_1, ..., i_n și se iau nule pentru indicii diferiți de $i_1, \ldots, i_n$.

Axiomele de ordonare și continuitate date pentru cazul $n = 3$ se pot păstra în cazul general și se obțin spațiile afine reale generalizate (cu mai multe dimensiuni).

În ce privește axiomele date pentru relația de perpendicularitate, extinderea lor la mai multe dimensiuni se poate face fără dificultate. Dar pentru a se obține proprietăți remarcabile în spațiile infinit dimensionale, limitarea expunerii la considerații elementare nu mai este posibilă, fiind necesare anumite considerații de topologie.

Generalizarea naturală a spațiului euclidian la cazul infinit dimensional a fost dată de David Hilbert și spațiile introduse de el pe această cale se numesc spații Hilbert.

Un spațiu Hilbert se poate defini în modul următor.

Se consideră un spațiu afin real H cu un număr oarecare de dimensiuni (finit sau infinit).

Se presupune apoi că este dată o funcție cu valori reale F, definită pentru perechile de translații S, T din spațiul H, avînd următoarele proprietăți:

1) $F(S, T) = F(T, S)$,

oricare ar fi translațiile S, T.

2) $F(x_1S_1 + x_2S_2, T) = x_1F(S_1, T) + x_2F(S_2, T)$,

oricare ar fi translațiile S_1, S_2, T și numerele reale x_1, x_2.

3) $F(S, S) \geqslant 0$.

4) $F(S, S) = 0$ numai pentru translația nulă, $S = O$.

5) Dacă avem un șir de translații S_1, S_2, ..., S_n, ... astfel încît $F(S_i - S_j, S_i - S_j)$ să tindă la zero cînd i, j tind la infinit, există o translație S astfel ca $F(S_i - S, S_i - S)$ să tindă la zero cînd i tinde la infinit.

Funcția F se numește *produsul scalar din spațiul Hilbert H*, iar $\sqrt{F(S, S)}$ se numește *norma translației* S. Fiind date două puncte A, B ele definesc o translație S și norma lui S se consideră ca *distanță* între punctele A, B și se notează $d(A, B)$.

Două translații S, T se numesc perpendiculare, dacă produsul lor scalar $F(S, T)$ este nul.

Distanța în spațiul Hilbert H verifică inegalitatea triunghiului

$$d(A, B) + d(B, C) \geqslant d(A, C)$$

şi avem egalitate numai dacă punctele A, B, C sînt coliniare şi dacă vectorii $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ au sensurile opuse.

Dacă vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ sînt perpendiculari, avem relaţia lui Pitagora:

$$d(A, B)^2 + d(A, C)^2 = d(B, C)^2.$$

§ 12. **SPAŢII PROIECTIVE**

Axioma 8′ a spaţiului afin generalizat arată că putem împărţi dreptele spaţiului afin în clase, punînd în aceeaşi clasă două drepte ori de cîte ori aceste drepte sînt paralele.

De asemenea, prima parte a axiomei 8′ arată că prin fiecare punct al spaţiului trece cîte o dreaptă din fiecare clasă de drepte paralele. Dacă convenim să asociem fiecărei clase un punct în afara spaţiului afin şi dacă numim acest punct *punctul de la infinit* al dreptelor din clasa respectivă, rezultă că prin fiecare punct al spaţiului afin şi prin fiecare punct de la infinit trece o dreaptă şi numai una. Deci axioma 1 a spaţiului afin se păstrează dacă adăugăm spaţiului afin punctele de la infinit şi considerăm perechi de puncte din care unul aparţine spaţiului afin.

Fie A, B două puncte oarecare în spaţiu şi P un punct la infinit, nesituat pe dreapta AB; dreptele ce trec prin A, B şi conţin punctul P sînt paralele, deci după axioma 8′ aparţin unui plan şi acest plan este unic dacă A, B sînt distincte. Deci prin două puncte distincte A, B ale spaţiului afin şi prin orice punct de la infinit P trece un plan şi unul singur, dacă punctele A, B, P nu sînt coliniare.

Fiind dat un punct A al spaţiului afin şi două puncte P, Q la infinit, dreptele ce trec prin A şi conţin punctul P, respectiv Q, definesc un plan. Rezultă că axioma 2 a spaţiului afin se păstrează dacă adăugăm punctele de la infinit şi considerăm sisteme de trei puncte, din care cel puţin unul aparţine spaţiului afin.

Fiind date două puncte la infinit, P, Q, alegînd un punct A în spaţiul afin, în planul definit de punctele A, P, Q putem considera dreptele ce trec prin A. Aceste drepte au cîte un punct la infinit şi putem spune că mulţimea acestor puncte constituie dreapta de la infinit care trece prin punctele P, Q. Axioma 4′ arată că punctele dreptei PQ nu depind de alegerea punctului A. În acest mod axioma 1 se verifică pentru perechile de puncte de la infinit.

Fiind date trei puncte necoliniare la infinit P, Q, R, să alegem un punct A în spaţiul afin şi să considerăm dreptele AP, AQ,

AR. Aceste drepte sînt necoplanare şi definesc două cîte două trei plane,

$$\alpha = (AQ, AR), \ \beta = (AP, AR), \ \gamma = (AP, AQ).$$

Vom numi punctele ale planului PQR punctele de la infinit ale dreptelor ce sînt definite de două puncte distincte situate fiecare în cîte unul din planele α, β, γ (nu neapărat în acelaşi plan).

Să arătăm că dacă alegem alt punct în locul lui A, fie A', obţinem aceleaşi puncte ale planului PQR. Fie M, N două puncte distincte aflate în cîte unul din planele α, β, γ. Dacă M, N sînt de exemplu în planul α, punctul de la infinit al dreptei MN este un punct la infinit şi al planului $A'QR$, conform axiomei 4′. Să presupunem că M se găseşte în planul α, iar N în planul β; paralelele m', n' duse prin A' la dreptele AM, AN se vor găsi în planele $\alpha' = (A'Q, A'R)$, respectiv $\beta' = (A'P, A'R)$. Planul definit de dreptele m', n', conţinînd punctul de la infinit al dreptei MN, potrivit axiomei 4′, rezultă că acest punct aparţine şi planului PQR, definit cu ajutorul punctului A' în loc de A.

Cu aceasta am arătat că prin trei puncte necoliniare la infinit trece un plan şi unul singur.

Axioma 5 se întăreşte prin adăugarea punctelor de la infinit şi devine:

5. Orice dreaptă conţine cel puţin trei puncte, al treilea fiind de exemplu punctul de la infinit.

Axioma 8′ nu se mai verifică după adăugarea punctelor de la infinit şi se înlocuieşte cu:

8*. Orice două drepte coplanare sînt concurente.

Într-adevăr, perechile de drepte paralele în spaţiul afin capătă un punct comun la infinit.

Spaţiul afin completat cu punctele de la infinit se numeşte *spaţiul proiectiv* asociat spaţiului afin.

Dacă numai vrem să deosebim punctele de la infinit de celelalte puncte ale spaţiului proiectiv, trebuie să renunţăm la noţiunea de paralelism. Putem defini spaţiul proiectiv direct cu ajutorul axiomelor 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8*, axioma 4, fiind o consecinţă a extinderii axiomelor 1, 2, la spaţiul proiectiv. Prin aceasta se consideră ca elemente primitive ale spaţiului proiectiv punctele, dreptele şi planele, ca în cazul spaţiului afin.

O axiomatizare mai simplă a spaţiului proiectiv, care foloseşte ca noţiuni primitive numai punctul şi dreapta se datoreşte lui Veblen. Axiomele lui Veblen se pot enunţa sub forma:

V_1. Prin două puncte distincte trece o dreaptă şi numai una.

V_2. Orice dreaptă conţine cel puţin trei puncte.

V_3. Dacă u, v sînt două drepte distincte concurente într-un punct O și dacă dreptele l, m nu trec prin O, dar întîlnesc fiecare din dreptele u, v, atunci l, m au un punct comun.

V_4. Există două drepte ce n-au nici un punct comun.

Axioma V_3 permite să se asocieze la oricare două drepte distincte și concurente un plan. Dacă cerem ca orice dreaptă să întîlnească orice plan, obținem spațiul proiectiv cu trei dimensiuni. Dacă din acest spațiu scoatem un plan împreună cu punctele și dreptele lui, obținem spațiul afin cu trei dimensiuni; elementele scoase joacă rol de elemente de la infinit.

În cazul spațiului proiectiv asociat spațiului afin real cu trei dimensiuni, dacă alegem un sistem de coordonate carteziene $\Omega A_1A_2A_3$ în spațiul afin, un punct P al spațiului afin se poate defini prin coordonatele sale X_1, X_2, X_3, iar un punct la infinit M se poate defini prin parametrii directori p_1, p_2, p_3 ai dreptelor paralele care trec prin punctul M.

Condiția ca planul

$$u_1X_1 + u_2X_2 + u_3X_3 + u_4 = 0 \qquad (110)$$

să conțină punctul $P(X_1, X_2, X_3)$ este ca X_1, X_2, X_3 să verifice ecuația planului.

Condiția ca același plan să conțină punctul de la infinit M este ca planul să fie paralel cu dreptele de parametrii directori p_1, p_2, p_3 și știm că această condiție se scrie:

$$u_1p_1 + u_2p_2 + u_3p_3 = 0. \qquad (111)$$

Parametrii directori p_1, p_2, p_3 pot fi înmulțiți cu același factor, fără ca punctul M să se schimbe.

Ecuațiile (110), (111) capătă o formă unitară dacă asociem punctelor $P(X_1, X_2, X_3)$ patru coordonate omogene, deci definite pînă la un factor, prin formulele:

$$\frac{x_1}{x_4} = X_1,\ \frac{x_2}{x_4} = X_2,\ \frac{x_3}{x_4} = X_3,\ (x_4 \neq 0)$$

și dacă presupunem că punctul M are coordonatele omogene $(p_1, p_2, p_3, 0)$. În acest caz, oricare ar fi punctul A din spațiul proiectiv, dacă A are coordonatele omogene y_1, y_2, y_3, y_4, atunci condiția ca A să aparțină planului (110) este dată de formula:

$$u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3 + u_4y_4 = 0. \qquad (112)$$

Din felul în care am introdus coordonatele omogene rezultă că punctele de la infinit verifică ecuația $y_4 = 0$, care este de forma

(112) și se numește ecuația *planului de la infinit* al spațiului proiectiv asociat spațiului afin.

Deci punctele spațiului proiectiv sînt definite prin patru coordonate omogene y_1, y_2, y_3, y_4, ce nu pot fi toate nule, deoarece pentru punctele spațiului afin avem $y_4 \neq 0$, iar pentru punctele de la infinit avem $y_1 = p_1$, $y_2 = p_2$, $y_3 = p_3$ și parametrii directori p_1, p_2, p_3 ai unei drepte nu pot fi toți nuli. In ce privește planele spațiului proiectiv, ele sînt date de cîte o ecuație liniară și omogenă în y_1, y_2, y_3, y_4. Dreptele sînt deci date de sisteme de două ecuații liniare și omogene în y_1, y_2, y_3, y_4 sau se mai pot defini prin ecuații parametrice de forma:

$$y_1 = a_1t + b_1s$$
$$y_2 = a_2t + b_2s$$
$$y_3 = a_3t + b_3s$$
$$y_4 = a_4t + b_4s,$$

t, s fiind parametrii omogeni pe dreaptă.

Automorfismele spațiului proiectiv sînt date de transformări liniare și omogene cu determinant nenul,

$$y_i' = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + a_{i3}y_3 + a_{i4}y_4,\ (i = 1, 2, 3, 4)$$
$$|a_{ij}| \neq 0.$$

Planele proiective, deci planele spațiului proiectiv, spre deosebire de planele afine, admit corelații fără puncte sau direcții singulare. Deci există într-un plan proiectiv corespondențe biunivoce între punctele și dreptele sale, care transformă puncte coliniare în drepte concurente. O astfel de corespondență este de exemplu transformarea care asociază fiecărui punct $A(a_1, a_2, a_3)$ din planul $y_4 = 0$ dreapta din acest plan de ecuație $a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 = 0$.

Capitolul IV

TEORIA RELATIVITĂȚII

§ 1. RELATIVITATEA RESTRÎNSĂ

În mecanica clasică se presupune că spațiul în care au loc fenomenele fizice este un spațiu euclidian. Luînd deci în acest spațiu un sistem de coordonate carteziene ortogonale $Oxyz$ [Cap. I, § 4], mișcarea unui punct material $P(x, y, z)$ ce reprezintă un corp este dată, dacă se cunosc coordonatele x, y, z ale punctului în funcție de timp.

Timpul se măsoară printr-o coordonată t care crește continuu de la minus infinit la plus infinit. Mișcarea unui punct material ce se găsește la momentul $t = t_0$ în poziția $P_0(x_0, y_0, z_0)$ este dată de formulele:

$$x = f(t),\ y = \varphi(t),\ z = \psi(t), \tag{1}$$

funcțiile f, φ, ψ avînd proprietatea că pentru $t = t_0$ ne dau

$$x_0 = f(t_0),\ y_0 = \varphi(t_0),\ z_0 = \psi(t_0).$$

Rezultă deci că mișcarea punctului se face pe o curbă definită de ecuațiile (1) [cap. I, § 4] și care se numește traiectoria punctului.

Desigur, un punct poate să se miște mai repede sau mai încet pe traiectorie, după modul cum cresc sau descresc funcțiile f, φ, ψ cînd t crește. Se convine a spune atunci că viteza punctului P are ca direcție vectorul avînd componentele date de derivatele funcțiilor f, φ, ψ, și că pătratul vitezei este dat de formula:

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2, \tag{2}$$

unde am notat cu $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ derivatele lui f, φ, ψ în raport cu t. Ținînd seama că derivatele într-un punct reprezintă parametrii directori ai tangentei la curbă în acel punct [cap. I, § 4], rezultă că viteza în fiecare punct este un vector îndreptat de-a lungul tangentei în acel punct la curbă.

Ținînd seama de formula (20′) din capitolul II, putem scrie formula (2) sub forma:

$$v = \frac{ds}{dt}, \tag{2'}$$

unde ds este diferențiala distanței dintre două puncte, unul fix și altul mobil, ale curbei definită de mișcarea (1), considerînd această distanță ca funcție de timp. Se mai spune că v este derivata spațiului în raport cu timpul. Dacă derivatele f', φ', ψ' sînt constante, deci dacă f, φ, ψ sînt date de formulele (14″) din capitolul I, viteza este o constantă și avem:

$$v^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Se zice în acest caz că mișcarea este uniformă și această mișcare se face evident în linie dreaptă.

În mecanica clasică se admite ca o axiomă, principiul inerției al lui Galilei[1] care spune că mișcarea unui punct asupra căruia nu acționează nici o forță este o mișcare uniformă.

Rezultă deci că dacă asupra unui corp redus la un punct nu acționează nici o forță, atunci dacă el este în repaus, deci are o viteză nulă în momentul inițial, continuă să rămînă în repaus, iar dacă este în mișcare și are în momentul inițial viteza v_0, el continuă mișcarea cu viteza v_0 în linie dreaptă.

Dacă asupra unui corp (redus la un punct P) acționează o forță, această forță poate fi reprezentată printr-un vector ce are originea în punctul P și extremitatea într-un punct Q. Notînd cu X, Y, Z proiecțiile vectorului $\overrightarrow{PQ}$ pe axele coordonate, X, Y, Z se consideră funcții de coordonatele x, y, z ale punctului P, și eventual de derivatele lui x, y, z în raport cu t și pot depinde și de t. Ecuațiile fundamentale ale mecanicii, care definesc mișcarea punctului P, sînt date de ecuațiile lui Newton[2]

$$m\ddot{x} = X,\ m\ddot{y} = Y,\ m\ddot{z} = Z, \tag{3}$$

unde m este masa corpului, iar $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ sînt derivatele de ordinul al doilea ale funcțiilor f, φ, ψ.

Se zice că $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ sînt componentele accelerației punctului P aflat în mișcare. Accelerația arată deci modul cum variază viteza.

Dacă forța este nulă, deci $X = Y = Z = 0$, accelerația este nulă și viteza este constantă. Regăsim principiul de inerție al lui Galilei care spune că mișcarea este uniformă și în linie dreaptă.

Rezultă prin urmare că dacă asupra unui corp (redus la un punct) acționează forțe, el se mișcă după o curbă care poate fi o linie dreaptă

---

[1] Galileo Galilei (1564-1642), mare matematician italian, fondator al mecanicii și descoperitor al legilor căderii corpurilor.

[2] Isaac Newton (1643-1727), mare matematician englez, fondator împreună cu Galilei al mecanicii și unul dintre creatorii calculului infinitezimal.

dacă forța are o direcție constantă ce coincide cu direcția vitezei inițiale a corpului.

Ecuațiile fundamentale (3) ale mișcării unui corp rămîn invariante la o mișcare uniformă a sistemului de coordonate dacă X, Y, Z sînt constante. În adevăr, dacă luăm noi coordonate, să zicem u, v, w, așa fel ca să avem:

$$u = x + at + \alpha,\ v = y + bt + \beta,\ w = z + ct + \gamma, \qquad (4)$$

ecuațiile (3) nu se schimbă, deoarece avem $\ddot{u} = \ddot{x}$, $\ddot{v} = \ddot{y}$, $\ddot{w} = \ddot{z}$. O mișcare a sistemului de coordonate dată de formulele (4) se zice o mișcare *galileiană*. Printr-o asemenea mișcare, vitezele se schimbă după formulele:

$$\dot{u} = \dot{x} + a,\ \dot{v} = \dot{y} + b,\ \dot{w} = \dot{z} + c.$$

Se știe pe de altă parte că lumina se deplasează cu o viteză de aproape 300 000 km/s. Experiențele lui Michelson (1889) au arătat că viteza luminii păstrează aceeași valoare, independent de faptul că observatorul care măsoară viteza este în repaus sau în mișcare față de sursă. Acest rezultat a stat la baza postulatului fundamental al teoriei restrînse a relativității, formulat de Einstein[1]. Acest postulat spune că viteza luminii față de orice sistem de referință (și totodată, viteza maximă a oricărei interacțiuni) este o constantă absolută, independentă de sistemul de referință. Experiențele ulterioare ale lui Kennedy și Thorndike (1932), ale lui Tomaschek (1926) și observațiile lui de Sitter asupra stelelor duble (1913) au confirmat ipoteza mai sus amintită.

Aceasta constituie un paradox (un fapt ce nu se poate explica) pentru mecanica clasică și relativitatea restrînsă creată de Einstein vine să evite acest paradox, considerînd spațiul fizic în care trăim ca un spațiu cu patru dimensiuni. Trei dimensiuni ale spațiului fizic sînt trei dimensiuni ale geometriei euclidiene și a patra dimensiune este timpul t, dimensiunile fiind legate în așa fel, încît în spațiul 4-dimensional, distanța $d\sigma$ între două puncte vecine

$$P(x, y, z, t),\ Q(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)$$

este dată de formula:

$$d\sigma^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \qquad (5)$$

[1] A l b e r t E i n s t e i n (1879-1955), profesor la Universitatea din Berlin și Princeton (S. U. A.), creatorul teoriei relativității și altor teorii fizice.

unde c este viteza luminii. Dacă punem $ct = x_0$, această formulă se scrie:

$$d\sigma^2 = dx_0^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \qquad (5')$$

și prin urmare spațiul coordonatelor x, y, z, t este un spațiu afin cu patru dimensiuni, cu metrică nedefinită, deci cu o metrică care poate avea atît valori pozitive, cît și valori negative sau nule. Se spune că este un spațiu pseudoeuclidian. Spațiul cu metrica (5) se mai numește spațiul lui Minkowski. Formula (5) ne arată că $d\sigma=0$, dacă punctul (x, y, z) se mișcă cu viteza luminii față de un sistem de coordonate carteziene al spațiului euclidian cu trei dimensiuni, deoarece avem:

$$d\sigma^2 = dt^2\left(c^2 - \frac{ds^2}{dt^2}\right) = dt^2\,(c^2 - v^2), \qquad (6)$$

unde ds este definit de formula (20′) din capitolul II, iar v este definit de formula (2′).

Formula (6) ne arată că $d\sigma$ este real numai dacă membrul al doilea este pozitiv, deci dacă $v \leqslant c$. Este deci natural să presupunem că în spațiul fizic al relativității restrînse, viteza luminii este cea mai mare viteză posibilă, sau altfel spus, celelalte viteze sînt inferioare vitezei luminii. Viteza luminii apare deci ca un invariant al spațiului fizic, astfel că paradoxul lui Michelson este înlăturat. Ne putem întreba care sînt mișcările spațiului pseudoeuclidian (5) al relativității restrînse. Aceste mișcări conțin desigur deplasările spațiului euclidian al coordonatelor x, y, z, formate din rotații și translații și conțin și transformarea $t' = t + k$, care este o translație a timpului.

Pentru aceste transformări, coordonatele spațiale x, y, z și coordonata temporală t se transformă separat. Există însă și transformări care nu mai au această proprietate.

Să considerăm de exemplu o transformare care lasă variabilele y, z neschimbate, însă transformă x_0, x după formulele:

$$\begin{aligned} x_0 &= x_0' \operatorname{ch} \alpha + x' \operatorname{sh} \alpha \\ x &= x_0' \operatorname{sh} \alpha + x' \operatorname{ch} \alpha, \end{aligned} \qquad (6')$$

unde α este un parametru oarecare și unde sh α, ch α sînt sinusul și cosinusul hiperbolic, deci sînt date de formulele (31′), capitolul II. Aceste transformări păstrează forma pătratică (5′), deoarece avem:

$$dx_0^2 - dx^2 = dx_0'^2 - dx'^2,$$

cum este uşor de văzut, ţinînd seama că avem formula:

$$\mathrm{ch}^2 \alpha - \mathrm{sh}^2 \alpha = 1.$$

Avînd în vedere că $x_0 = ct$, rezultă că transformările

$$x = x' \,\mathrm{ch}\, \alpha + ct' \,\mathrm{sh}\, \alpha, \quad y = y'$$
$$t = \frac{x'}{c} \,\mathrm{sh}\, \alpha + t' \,\mathrm{ch}\, \alpha, \quad z = z' \tag{6''}$$

lasă neschimbată forma pătratică (5). Aceste transformări se numesc *transformări Lorentz.*

Rezultă de aici că două evenimente care apar simultane pentru un observator, care măsoară timpul cu variabila t, pentru un observator care măsoară timpul cu variabila t' nu apar în acelaşi timp, dacă $\alpha \neq 0$. Într-adevăr, să considerăm două puncte $P_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$ ale spaţiului fizic 4-dimensional (5) şi fie x_1', y_1', z_1', t_1' şi x_2', y_2', z_2', t_2' coordonatele acelor puncte în noul sistem de coordonate dat de formulele (6''). Avem atunci formulele:

$$x_2 - x_1 = (x_2' - x_1') \,\mathrm{ch}\, \alpha + c(t_2' - t_1') \,\mathrm{sh}\, \alpha$$
$$t_2 - t_1 = \frac{x_2' - x_1'}{c} \,\mathrm{sh}\, \alpha + (t_2' - t_1') \,\mathrm{ch}\, \alpha$$

şi prin urmare, presupunînd $t_2 = t_1$ şi $x_2 \neq x_1$, rezultă că avem $t_2' = t_1'$, numai dacă $\mathrm{sh}\, \alpha = 0$, deci dacă $\alpha = 0$.

În teoria relativităţii restrînse, Albert Einstein a presupus că mişcările spaţiului lui Minkowski, avînd invariantul $d\sigma^2$ dat de formula (5), constituie transformările de sisteme de referinţă spaţio-temporale, care lasă invariante legile fizicii. Deci aceste mişcări joacă un rol fundamental în teoria relativităţii restrînse. În această teorie se presupune în primul rînd că există un sistem de referinţă (x, y, z, t), care atribuie oricărui punct din spaţiul real, la orice moment t, trei numere reale x, y, z. Faţă de acest sistem, la fiecare moment, distanţele între două puncte se măsoară în centimetri prin formula lui Pitagora, iar timpul se măsoară în secunde, cu ajutorul unui ceasornic universal, astfel încît lumina parcurge, faţă de acest sistem de referinţă, 300 000 km/s.

Teoria relativităţii restrînse este în primul rînd o teorie a cîmpurilor electromagnetice; aceste cîmpuri sînt produse în spaţiu de curenţi electrici aflaţi în mişcare şi sînt caracterizate prin doi vectori E, M care sînt funcţii de punct şi timp. Aceste funcţii sînt determinate

cînd se cunosc intensitatea curentului electric i şi densitatea ρ ca funcţii de timp şi sînt legate prin ecuaţiile lui Maxwell:

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\ H - \dfrac{\partial D}{\partial t} = i, \quad \mathrm{div}\ D = \rho, \\ \mathrm{rot}\ E + \dfrac{\partial B}{\partial t} = 0, \quad \mathrm{div}\ B = 0, \end{cases} \tag{7}$$

unde D, B sînt vectori definiţi de curentul şi densitatea electrică considerate. Cîmpurile E, H acţionează asupra sarcinilor şi curenţilor electrici din spaţiu, imprimînd de exemplu unui electron de sarcină electrică e şi viteză v acceleraţia

$$a = \frac{e}{m}(E + v \times B). \tag{7'}$$

Vectorii H, D, ..., v, a au cîte trei componente, relative la axele x, y, z.

A doua ipoteză a teoriei relativităţii restrînse este că în orice alt sistem de referinţă al spaţiului şi timpului (x', y', z', t'), legat de sistemul (x, y, z, t) prin formule liniare, ce invariază expresia $d\sigma^2$, ecuaţiile (7) (7') rămîn invariante ca formă; vectorii E', M', D', B', i şi densitatea ρ' relativi la noul sistem de referinţă fiind legaţi de vectorii E, H, D, B, i, şi de mărimea ρ prin anumite relaţii liniare. Menţionăm însă că legile de transformare impuse componentelor vectorilor indicaţi se exprimă sub o formă sugestivă cu ajutorul calculului tensorial.

În ceea ce priveşte legile de transformare pentru vectorii viteză $\vec{v}$ şi acceleraţie $\vec{a}$, acestea rezultă din formulele:

$$v_{x'}' = \frac{dx'}{dt'}, \quad v_{y'}' = \frac{dy'}{dt'}, \quad v_{z'}' = \frac{dz'}{dt'},$$
$$a_{x'}' = \frac{d^2x'}{dt'^2}, \quad a_{y'}' = \frac{d^2y'}{dt'^2}, \quad a_{z'}' = \frac{d^2z'}{dt'^2}$$

şi din legea de transformare cunoscută a variabilelor x, y, z, t, şi rezultă în particular că avem $v' = c$, dacă $v = c$.

Înainte de a considera mişcările generale ale spaţiului lui Minkowski, să revenim la transformarea Lorentz specială (6'') şi să observăm că dacă avem la un moment $t = t_0$ o bară aşezată rigid pe axa x şi avînd extremităţile în punctele $P_1(x_1, 0, 0)$, $P_2(x_2, 0, 0)$, atunci ea va avea lungimea $l = |x_1 - x_2|$. Pentru sistemul de referinţă (x', y', z', t'), lungimea barei se va calcula la un moment t_0'.

Să presupunem că la acest moment, bara are extremitățile în punctele $P_1'(x_1', 0, 0)$, $P_2'(x_2', 0, 0)$. Din (6″) rezultă formule de forma:

$$x_1 = x_1' \operatorname{ch} \alpha + c\, t_0' \operatorname{sh} \alpha, \quad x_2 = x_2' \operatorname{ch} \alpha + c\, t_0' \operatorname{sh} \alpha.$$

Scăzînd, rezultă:

$$l = |x_1 - x_2| = |x_1' - x_2'| \operatorname{ch} \alpha = l' \operatorname{ch} \alpha, \quad (l' = |x_1' - x_2'|).$$

Pe de altă parte, să observăm că originea sistemului (x', y', z', t') are la momentul t, cînd $t' = \frac{t}{\operatorname{ch} \alpha}$, abscisa x dată de formula:

$$x(t) = ct' \operatorname{sh} \alpha = ct \operatorname{th} \alpha,$$

deci viteza originii sistemului de referință accentuat este:

$$v = c \operatorname{th} \alpha.$$

De aici rezultă că punînd

$$\beta = \frac{v}{c},$$

avem formula:

$$\operatorname{ch} \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - th^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

astfel încît formula găsită mai sus se poate scrie:

$$l' = l\sqrt{1 - \beta^2} < l.$$

Această formulă arată că bara considerată are o lungime mai mică pentru sistemul care se mișcă față de bară decît pentru sistemul legat solidar de bară. Interpretînd formula (6″) ca definind o mișcare a sistemului (x', y', z', t') față de sistemul (x, y, z, t), rezultă că o bară își micșorează lungimea pe direcția mișcării, pentru un observator care se mișcă față de bară. Deci în teoria relativității restrînse apare fenomenul de *contracție a lungimilor*, fenomen care fusese prevăzut în 1903–1904 de Lorentz, în încercările sale de a elimina din mecanica clasică paradoxul ivit prin experiența lui Michelson.

Un fenomen analog are loc pentru intervale temporale. Într-adevăr, să presupunem că din originea sistemului (x, y, z, t) trimitem două semnale luminoase la momentele t_1, t_2. Din (6″) rezultă că pentru un ceasornic pus în originea sistemului (x', y', z', t'),

primul semnal a fost dat la momentul $t_1' = \frac{t_1}{\operatorname{ch} \alpha}$, iar al doilea, la momentul $t_2' = \frac{t_2}{\operatorname{ch} \alpha}$, astfel că obținem formula:

$$t_2 - t_1 = (t_2' - t_1') \operatorname{ch} \alpha = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

care arată că dacă în loc să măsoare timpul un observator din O', care este în mișcare față de ceasornicul din originea O a sistemului (x, y, z, t), îl măsoară observatorul din O, timpul apare dilatat cu factorul $\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} > 1$.

Să observăm că primul semnal luminos trimis din O va fi primit în originea O' a sistemului (x', y', z', t') la momentul t_1^*, pentru care $c(t_1^* - t_1) = (t_1^* + t_1)\, v$, deci avem:

$$t_1^* = \frac{c + v}{c - v}\, t_1 = \frac{1 + \beta}{1 - \beta}\, t_1.$$

În acest moment t_1^*, ceasornicul din punctul O' înregistrează timpul

$$t_1^{*\prime} = \frac{t_1^*}{\operatorname{ch} \alpha} = \frac{(1 + \beta)\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta}\, t_1 = (1 + \beta)\sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}\, t_1$$

și astfel observatorul din O', care cunoaște pe t_1^*, are posibilitatea să cunoască momentul t_1 în care a fost trimis primul semnal din O; o formulă analogă este valabilă pentru al doilea semnal,

$$t_2^{*\prime} = (1 + \beta)\sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}\, t_2.$$

Rezultă că cele două semnale luminoase *se văd* în punctul O' la intervalul de timp

$$t_2^{*\prime} - t_1^{*\prime} = (1 + \beta)\sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}\, (t_2 - t_1).$$

Pentru orice viteze v, deci pentru orice $\beta > 0$, avem:

$$(1 + \beta)\sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} > 1,$$

deci intervalul de timp ce desparte momentele de primire în O' a semnalelor este totdeauna mai mare decît intervalul ce desparte momentele de trimitere a semnalelor.

Să studiem acum grupul mişcărilor spaţiului lui Minkowski, care poartă numele de grup al lui Lorentz, după numele fizicianului olandez H. A. Lorentz, care a arătat primul legătura dintre acest grup şi ecuaţiile lui Maxwell.

Grupul Lorentz fiind format din transformări liniare în patru variabile x, y, z, t, ce invariază forma pătratică $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$, poate fi identificat cu grupul deplasărilor modelului lui Cayley al geometriei lui Lobacevski în spaţiu (cap. II, § 6). Considerînd formulele [cap. II, (26''')] pentru $R = c$,

$$\frac{z + ct}{x + iy} = w, \quad w' = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta},$$

observăm că pentru $w = 0$ rezultă $z = -ct$ şi din ecuaţia $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$ rezultă $x = y = 0$, deci $x + iy = 0$. Prin urmare, transformările

$$w' = \frac{\alpha w}{\gamma w + \delta},$$

care păstrează $w = 0$, corespunde la transformări Lorentz care păstrează sistemul de ecuaţii $x = y = 0$, deci la transformări Lorentz speciale în variabilele z, t.

Transformările Lorentz care lasă invariantă variabila t corespund la rotaţii în jurul centrului sferei $X^2 + Y^2 + Z^2 = c^2$, unde $X = \frac{x}{t}$, $Y = \frac{y}{t}$, $Z = \frac{z}{t}$ şi se poate arăta că orice transformare Lorentz se poate descompune în produsul unei astfel de rotaţii cu o transformare Lorentz specială şi cu o altă rotaţie. Într-adevăr, să presupunem că o transformare Lorentz oarecare L duce punctul $O(0, 0, 0, 1)$ într-un punct $A(a, b, c, d)$, diferit de O. Printr-o rotaţie R putem face ca dreapta OA să se suprapună peste axa Oz. Atunci A vine într-un punct B al acestei axe. Există o transformare Lorentz L_0 de forma (6'), care duce punctul O în punctul B.

Transformarea Lorentz RL_0R^{-1} va duce punctul O în punctul A, iar transformarea Lorentz $L(RL_0R^{-1})^{-1}$ va lăsa punctul O invariant, deci va fi o rotaţie R' în variabilele x, y, z, adică

$$L(RL_0R^{-1})^{-1} = R'.$$

De aici rezultă formula:

$$L = R_1L_0R_2, \quad (R_1 = R'R,\ R_2 = R^{-1}),$$

care arată că orice transformare Lorentz se descompune într-un produs a două rotaţii cu o transformare Lorentz de forma (6').

Numind *inerţial* orice sistem de referinţă (x', y', z', t') care e legat de sistemul (x, y, z, t) printr-o transformare Lorentz, formula precedentă arată că schimbînd axele x, y, z şi x', y', z' prin rotaţiile R_1, R_2, se obţin două sisteme de referinţe legate printr-o transformare Lorentz specială. Rezultă de aici că orice formulă invariantă faţă de rotaţiile variabilelor x, y, z şi faţă de transformările Lorentz speciale în variabilele z, t este invariantă faţă de orice transformare Lorentz.

Menţionăm în încheiere că scriind legea de transformare a ecuaţiilor lui Maxwell faţă de o transformare Lorentz (6'), în conformitate cu ipotezele teoriei relativităţii restrînse, se obţine formula lui Biot-Savart cunoscută în fizica elementară, după care un curent în mişcare dă naştere unui cîmp magnetic. Anume, considerînd o transformare Lorentz specială caracterizată prin viteza v de deplasare a unui sistem de referinţă (x', y', z', t') faţă de alt sistem (x, y, z, t) de-a lungul axei x, legile de transformare ale cîmpului electromagnetic în vid dau relaţiile:

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(E_y - \beta' H_z),$$

$$E'_z = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(E_z + \beta' H_y), \quad (\beta' = \beta c\,\mu_0)$$

$$H'_x = H_x, \quad H'_y = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(H_y + \beta'' E_z),$$

$$H'_z = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(H_z - \beta'' E_y), \quad \left(\beta'' = \frac{\beta}{c\mu_0}\right).$$

Dacă în originea sistemului (x, y, z, t) avem un electron de sarcină electrică e, cîmpul $(\vec{E}, \vec{H})$ definit de acest electron este dat de legea lui Coulomb:

$$\vec{H} = 0, \quad E_x = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

$$E_y = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad E_z = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

În sistemul accentuat va rezulta un cîmp magnetic $\vec{H}$ situat în planul y, z avînd componentele:

$$H'_x = 0, \quad H'_y = \frac{e\beta''(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

$$H'_z = -\frac{e\beta''(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}}{4\pi\varepsilon_0} \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Mărimea acestui cîmp este:

$$H = \frac{\beta'' e}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\sqrt{y^2+z^2}}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Pentru viteze v mici, neglijînd pe β față de 1, obținem formula lui Biot-Savart, sub forma:

$$H = \frac{ev}{4\pi\varepsilon_0\mu_0 c^2} \frac{\sqrt{y^2+z^2}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{ev}{4\pi\varepsilon_0\mu_0 c^2} \frac{\sin\alpha}{r^2},$$

unde r este distanța de la electron la punctul $P(x, y, z)$ al spațiului, în care calculăm cîmpul H, iar α este unghiul dreptei OP cu axa Ox. Dar avem $\varepsilon_0\mu_0 c^2 = 1$ și rezultă:

$$H = \frac{ev \sin\alpha}{4\pi r^2},$$

formulă binecunoscută în electricitate.

§ 2. RELATIVITATEA GENERALĂ

Relativitatea restrînsă nu a reușit să explice alte fenomene fizice, ce nu puteau fi explicate cu ajutorul principiilor mecanicii clasice. Unul dintre aceste fenomene se referă la faptul că traiectoria unei raze de lumină care ne vine de la stele îndepărtate se curbează atunci cînd trece prin vecinătatea Soarelui, fenomen ce a putut fi observat în timpul eclipselor de Soare. Or, în relativitatea restrînsă traiectoria razei de lumină continuă să fie considerată ca o linie dreaptă. De aceea, Einstein presupune că numai în primă aproximație distanțele în spațiul fizic sînt date de o formulă de forma (5), dar

că în general $d\sigma$ este dat de o formă pătratică în dx, dy, dz, dt care se poate scrie sub forma:

$$d\sigma^2 = (ds^4)^2 - (ds^1)^2 - (ds^2)^2 - (ds^3)^2 \qquad (7)$$

unde ds^4, ds^1, ds^2, ds^3 sînt forme liniare în dx, dy, dz, dt,

$$ds^i = a^i dx + b^i dy + c^i dz + d^i dt, \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

în care a^i, b^i, c^i, d^i sînt funcții de variabilele x, y, z, t. Spațiul fizic este deci un spațiu al lui Riemann cu patru dimensiuni cu metrica formată dintr-un pătrat pozitiv și trei pătrate negative. Un asemenea spațiu este în general un spațiu curb, deci drumurile cele mai scurte nu sînt linii drepte. Se admite că spațiul este mai curb în regiunile unde materia este mai concentrată. Lumina în acest spațiu descrie o geodezică de lungime nulă, ca și în cazul teoriei relativității restrînse unde $d\sigma$, definit de formula (5), este zero pentru traiectoriile luminii. Ținînd seama că regiunea din vecinătatea Soarelui este o regiune unde densitatea materiei este foarte mare, razele de lumină trecînd prin această regiune se curbează mai mult decît în alte regiuni din sistemul nostru solar, pe care lumina le traversează.

Să presupunem că sîntem în cazul unei eclipse de Soare. În acest timp stelele din vecinătatea Soarelui pot fi observate și se constată că ele au o poziție schimbată față de aceea care este cunoscută din mișcarea bolții cerești.

În fig. 114, P este punctul de pe Pămînt din care se fac observațiile, cercul S reprezintă Soarele, E este poziția reală a unei stele, E' — poziția aparentă.

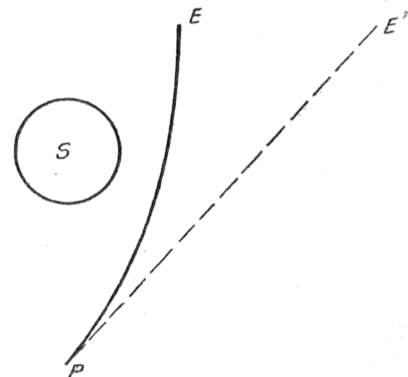


Fig. 114

Relativitatea generală a reușit să explice și un alt fenomen, numit *mișcarea periheliului lui Mercur*. După cum se știe, conform legilor lui Kepler, traiectoriile planetelor în jurul Soarelui sînt elipse (cap. I, § 4), Soarele ocupînd unul din focare.

Explicația acestui fapt a putut fi dată admițînd legea gravitației universale, care spune că două corpuri cerești se atrag unul pe altul cu o forță proporțională cu masele celor două corpuri și invers proporțională cu pătratul distanței dintre ele.

Observațiile astronomice au arătat însă că mișcarea plantei Mercur, cea mai apropiată planetă de Soare, prezintă o anomalie față de legea gravitației universale.

Într-adevăr, considerînd elipsa descrisă de această planetă în jurul Soarelui și numind cu P punctul cel mai apropiat de Soare (periheliu), acest punct nu rămîne același de la o rotație a planetei la alta. Cu alte cuvinte, elipsa suferă cu timpul o rotație.

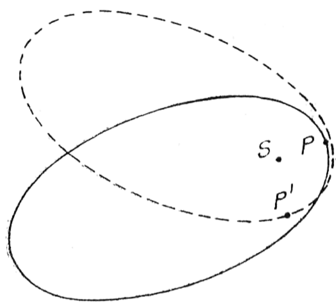


Fig. 115

În fig. 115 sînt prezentate două poziții ale traiectoriei lui Mercur; una este dată printr-o trăsătură plină, cealaltă — punctată.

Această anomalie nu a putut fi explicată în mecanica clasică cu ajutorul legii gravitației universale. Ea a putut fi însă explicată în teoria relativității generale, și anume datorită curburii spațiului. În relativitatea generală se introduce un principiu conform căruia mișcarea corpurilor cerești, în particular a planetelor în jurul Soarelui se datorește faptului că metrica spațiului posedă o curbură și că planetele descriu drumurile cele mai scurte compatibile cu metrica spațiului, așa cum un punct pe o sferă descrie în absență de forțe un cerc mare (o geodezică).

Rezultă deci că în relativitatea generală, legea gravitației universale este înlocuită cu principiul inerției lui Einstein.

Corpurile cerești descriu drumurile cele mai scurte compatibile cu metrica spațiului presupusă de tipul (7).

§ 3. ECUAȚIILE GEODEZICILOR UNUI SPAȚIU RIEMANN

Am văzut în paragraful precedent că conform ipotezei lui Einstein, spațiul în care trăim este un spațiu al lui Riemann cu patru dimensiuni și că geodezicile de lungime nulă sînt traiectoriile razelor luminoase. Deci geodezicile joacă în spațiul riemannian rolul dreptelor din spațiul euclidian. Este prin urmare necesar să se găsească ecuațiile geodezicilor cînd este cunoscută metrica spațiului. Pentru a rezolva această problemă vom presupune că avem un spațiu V_n cu n dimensiuni raportat la un sistem de coordonate $x^1, \ldots, x^n$. În cazul teoriei relativității, numărul n este egal cu 4, însă așa cum am spus în paragraful precedent, există unele teorii unitare în care

n are valoarea 5, 6 sau un număr mai mare, de aceea vom presupune, pentru moment, că n este un număr întreg pozitiv arbitrar.

Fie atunci

$$ds^2 = a_{ij}dx^i dx^j \tag{8}$$

metrica spațiului V_n. Să presupunem că t este un parametru oarecare, să zicem timpul din mecanica obișnuită și să considerăm expresia

$$T = \frac{1}{2} a_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j \left(\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}\right) \tag{8'}$$

ca forță vie a unui sistem mecanic care are n grade de libertate $x^1, \ldots, x^n$. Să presupunem că sistemul este supus la un sistem de forțe externe ce derivă dintr-un potențial U. Atunci ecuațiile de mișcare ale sistemului mecanic sînt date de ecuațiile lui Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial x^i} = \frac{\partial U}{\partial x^i}. \tag{8''}$$

În cazul particular în care se consideră mișcarea unui punct material oarecare P de masă m din spațiul euclidian obișnuit raportat la coordonate carteziene ortogonale x, y, z, atunci mișcarea punctului sub acțiunea unei forțe F este dată în mecanica clasică de formula fundamentală a lui Newton:

$$ma = F, \tag{8'''}$$

unde a este accelerația și are drept componente derivatele de ordinul al doilea ale lui x, y, z, în raport cu t, deci a este un vector de componente

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2},\ \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2},\ \ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Ecuațiile mișcării se scriu deci, dacă F derivă dintr-un potențial U, astfel:

$$m\ddot{x} = \frac{\partial U}{\partial x},\ m\ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial y},\ m\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

În acest caz forța vie este dată de formula:

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} mv^2,$$

unde v este viteza punctului. Dacă nu există forțe externe, deci $U = 0$, ecuațiile mișcării se scriu:

$$\ddot{x} = 0,\ \ddot{y} = 0,\ \ddot{z} = 0,$$

care integrate ne dau:

$$x = at + \alpha,\ y = bt + \beta,\ z = ct + \gamma, \tag{8^{IV}}$$

care reprezintă ecuațiile unei drepte și ajungem astfel la principiul de inerție a lui Galilei:

Un punct material în mișcare, asupra căruia nu acționează nici o forță, se mișcă în linie dreaptă cu viteză constantă.

În adevăr, ecuațiile (8^{IV}) ne spun că:

$$v^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

deci viteza v a punctului P este constantă.

Dacă punctul material este imobil în momentul inițial, deci dacă pentru $t = 0$, viteza v este nulă, aceasta înseamnă că $a = b = c = 0$ și ecuațiile (8^{IV}) ne spun că punctul rămîne fix.

Revenind la ecuațiile lui Lagrange, vedem că ele coincid în cazul particular al mișcării unui punct material P cu ecuația fundamentală ($8'''$) a mecanicii clasice și sînt de altfel deduse în general din această ecuație aplicată unui sistem de puncte, care pot constitui unul sau mai multe corpuri materiale.

Să arătăm acum că ecuațiile lui Lagrange admit integrala primă

$$T = U + E, \tag{9}$$

unde E este o constantă. Aceasta revine a spune că dacă x^i ca funcții de t satisfac sistemul ($8''$), atunci avem:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dU}{dt}.$$

Or, această ecuație se scrie, ținînd seama că T depinde atît de x^i cît și de $\dot{x}^i$, în timp ce U depinde numai de x^i,

$$\sum_1^n{}_i \left[\frac{\partial T}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i}\frac{d\dot{x}^i}{dt} - \frac{\partial U}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt}\right] = 0. \tag{9'}$$

Pe de altă parte, ținînd seama că T este o funcție de gradul al doilea în $\dot{x}^i$, omogenă, deci toți termenii sînt de gradul al doilea, putem utiliza teorema lui Euler, care spune că avem:

$$\sum_1^n{}_i \frac{dT}{d\dot{x}^i}\frac{\partial x^i}{dt} = 2T$$

Derivînd această relație în raport cu t, obținem:

$$\sum_1^n{}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i}\right)\frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i}\frac{d\dot{x}^i}{dt} = 2\frac{\partial T}{dt}.$$

Ținînd seama de ecuațiile lui Lagrange, putem scrie această ecuație:

$$\sum_1^n{}_i \left[\frac{\partial T}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i}\frac{d\dot{x}^i}{dt} + \frac{\partial U}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt}\right] = 2\frac{dT}{dt},$$

care este echivalentă cu ecuația ($9'$), deci (9) este o integrală primă. Această integrală primă se numește *integrala forței vii* a sistemului.

Să presupunem acum că nu există forțe externe, deci că în ecuațiile lui Lagrange ($8''$) avem $U = 0$. În acest caz ecuațiile lui Lagrange se scriu:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial T}{dx^i} = 0. \tag{9''}$$

Această ecuație reprezintă ecuațiile geodezicilor spațiului V_n. Avem deci teorema:

Fiind dat un spațiu V_n, geodezicile sale sînt traiectoriile sistemului mecanic asociat în absență de forțe externe.

Ținînd seama că ecuațiile lui Lagrange admit integrala primă (9), rezultă că ecuațiile geodezicilor admit integrala primă $T = E$. Cum avem formula:

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 2T = 2E,$$

rezultă că geodezica este de lungime nulă dacă E este zero.

Dacă $E \neq 0$, deci arcul ds nu este zero, geodezicile pot fi definite, de asemenea, drept curbele ce fac extremă integrala

$$I = \int_{s0}^{s} ds,$$

deci geodezicile ce nu sînt de lungime nulă au proprietatea că integrala I are cea mai mică valoare, cea mai mare sau este staționară pentru o geodezică trecînd prin două puncte P_0, P față de orice altă curbă trecînd prin aceleași puncte.

Ținînd seama că avem

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} = a_{ij}\dot{x}^j,\ \frac{\partial T}{\partial x^i} = \frac{1}{2}\frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i}\dot{x}^j\dot{x}^k,$$

ecuațiile ($9''$) se pot încă scrie sub forma:

$$a_{ij}\ddot{x}^j + \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^j\dot{x}^k - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i}\dot{x}^j\dot{x}^k = 0.$$

Cum al doilea termen se poate simetriza în j, k, scriind:

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^j\dot{x}^k = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial a_{ik}}{\partial x^j}\right]\dot{x}^j\dot{x}^k,$$

ecuațiile (9) devin:

$$a_{ij}\ddot{x}^j + |j\,k,\,i|\dot{x}^j\dot{x}^k = 0,$$

unde am pus:

$$|j\,k,\,i| = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial a_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i}\right] \tag{10'}$$

și cantitățile $|j,k,i|$ se numesc simbolii lui Christoffel de prima speță asociați metricii (8). Ținînd seama că noi presupunem că determinantul $a = |a_{ij}|$ este diferit de zero, rezultă că ecuațiile (10) se pot rezolva în raport cu $\ddot{x}^j$ și avem:

$$\ddot{x}^i + \left|{i \atop jk}\right|\dot{x}^j\dot{x}^k = 0, \tag{11}$$

unde am pus:

$$\left|{i \atop jk}\right| = a^{is}|jk,\,s| \tag{11'}$$

și am notat cu a^{is} reciprocii determinantului a, deci avem:

$$a_{is}a^{sj} = \delta^j_i.$$

Cantitățile $\left|{i \atop jk}\right|$ se numesc simbolii lui Chrisoffel de-a doua speță ai metricei (8)

Să observăm acum că dacă în formula (8) cantitățile a_{ij} sînt constante, deci nu depind de variabilele $x^1, \ldots, x^n$, derivatele $\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}$ sînt nule, deci simbolii lui Christoffel de prima și a doua speță sînt zero, prin urmare ecuațiile (11) ne spun că derivatele de ordinul al doilea ale variabilelor x^i în raport cu t sînt nule, deci x^i sînt funcții liniare de variabila t; altfel spus avem:

$$x^i = a^i t + b^i, \tag{12}$$

unde a^i, b^i sînt constante. Aceasta înseamnă că geodezicile sînt în acest caz linii drepte date de ecuații de forma:

$$\frac{x^1 - b^1}{a^1} = \ldots = \frac{x^n - b^n}{a^n}, \tag{12'}$$

deci sînt drepte care trec prin punctul B $(b^1, \ldots, b^n)$ și au direcția dată de vectorul $a^1, \ldots, a^n$, vector ce-l presupunem diferit de zero, altfel geodezica s-ar reduce la un punct, punctul B.

Rezultă că atît în spațiul euclidian obișnuit, în care metrica este dată de formula:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \tag{13}$$

cît și în spațiul lui Minkowski al teoriei relativității restrînse, în care avem:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{13'}$$

geodezicile sînt linii drepte. Altfel spus: fiind date două puncte ale unei drepte, distanța între aceste puncte, calculată pe dreaptă, este mai mică decît distanța calculată pe orice altă curbă ce unește aceste puncte.

Să presupunem acum că putem scrie metrica spațiului sub forma:

$$ds^2 = \varepsilon d\sigma^2 + V^2(dx^n)^2, \tag{14}$$

unde $\varepsilon = 1$ sau -1 și unde $d\sigma^2$ este o metrică în $n-1$ variabile $x^1, \ldots, x^{n-1}$ și că V^2 este de asemenea o funcție numai de variabilele $x^1, \ldots, x^{n-1}$. Se spune atunci că metrica noastră este de tip static și cazul se prezintă în teoria relativității, cînd $n = 4$, $\varepsilon = -1$ și $d\sigma^2$ este o metrică pozitiv definită în variabilele x^1, x^2, x^3. În cazul relativității restrînse avem, ținînd seama de formula (13'):

$$V^2 = c^2,\quad d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \tag{13''}$$

deci $d\sigma^2$ reprezintă metrica spațiului euclidian E_3. Dacă notăm cu T forța vie asociată spațiului (14) și cu T' forța vie a spațiului cu metrica $d\sigma^2$ presupusă dată de o formulă de forma:

$$d\sigma^2 = b_{ij}dx^i\,dx^i (i,\, j = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{14'}$$

avem evident formula:

$$T = \varepsilon T' + \frac{V^2}{2}(\dot{x}^n)^2,\quad T' = \frac{1}{2}b_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j.$$

Să scriem atunci ecuațiile (9) ale geodezicilor. Avem, deosebind cazul în care i ia valori de la 1 la $n-1$ și cazul în care $i = n$,

$$\begin{gathered}\varepsilon\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T'}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial T'}{\partial x^i}\right] - \frac{1}{2}\frac{\partial V^2}{\partial x^i}(\dot{x}^n)^2 = 0,\\ \frac{d}{dt}\left(V^2\frac{dx^n}{dt}\right) = 0.\end{gathered} \tag{16}$$

Ultima din aceste ecuaţii se poate integra şi se scrie:

$$V^2 \frac{dx^n}{dt} = K,$$

unde K este o constantă, pe care o putem presupune diferită de zero, căci altfel x^n ar fi o constantă, şi alegînd x^n, putem presupune $K = c^2$, deci în aşa fel ca să avem:

$$\frac{dx^n}{dt} = \frac{c^2}{V^2}, \tag{16'}$$

unde c este o constantă fixă. În cazul relativităţii restrînse avem $dx^4 = dt$, deci x^4 coincide cu timpul t, abstracţie făcînd de o deplasare.

Ţinînd seama de ecuaţia (16'), primele ecuaţii (16) se scriu:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T'}{\partial \dot{x}^i}\right] - \frac{\partial T'}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left[-\frac{\varepsilon c^4}{2V^2}\right].$$

Aceste formule ne arată că integrala forţelor vii referitoare la metrica (14) se scrie

$$T' = -\frac{\varepsilon c^4}{2V^2} + E \tag{17'}$$

unde E este o constantă.

Avem deci teorema:

Ecuaţiile geodezicilor unui spaţiu Riemann cu metrica de formă statică (14) *sînt date de ecuaţiile* (17), *deci de traiectoriile mişcărilor unui punct în spaţiul* V_{n-1}, sub influenţa unui cîmp de forţe derivînd din potenţialul

$$W = -\frac{\varepsilon c^4}{3V^2}, \tag{17'}$$

variabila x^n fiind definită în funcţiile de t de formula (16').

§ 4. CURBAREA RAZELOR LUMINOASE ŞI DEPLASAREA PERIHELIULUI

Am spus la începutul paragrafului 2 că relativitatea generală a reuşit să explice două fenomene importante şi anume: mişcarea periheliului lui Mercur şi curbarea traectorilor luminii. Vrem să arătăm cum se face această explicare presupunînd că spaţiul fizic este spaţiu curb cu patru dimensiuni, de tipul aceluia dat de teoria relativităţii generale şi presupunînd că mişcarea planelor, se face pe geodezice ale acestui spaţiu, iar traiectoriile luminii sînt geodezice

de lungime nulă. Pentru aceasta vom presupune că elementul de arc în spaţiul timp este definit de formula statică simplă

$$d\sigma^2 = \frac{c^2}{R^2}(dx^4)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \tag{18}$$

unde R este o funcţie de $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Comparînd cu formula (14) rezultă că avem

$$\varepsilon = -1,\ V = \frac{c}{R},\ \frac{dx^4}{dt} = R^2$$

şi deci integrala forţelor vii se scrie

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = c^2R^2 + 2E\left(\dot{x} = \frac{dx}{dz}\right).$$

Putem să interpretăm $c^2R^2/2$ ca potenţialul forţelor, deci să punem

$$U = \frac{c^2R^2}{2}.$$

Rezultă deci teorema:

Traiectoriile geodezicelor metricei (18) *coincid cu mişcările unui punct în spaţiul euclidian $E_3(x, y, z)$ sub acţiunea unor forţe ce derivă din potenţialul U.*

Cum noi presupunem că R^2 este o funcţie de r, sîntem în prezenţa unor mişcări centrale, deci mişcări plane. Putem presupune deci că aceste mişcări se fac în planul $z = 0$, astfel că utilizînd coordonatele polare r, θ deci punînd

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta\quad (r = \sqrt{x^2 + y^2}),$$

rezultă că avem două integrale prime, integrala forţelor vii şi integrala ariilor, deci r, θ ca funcţii de t satisfac ecuaţiile

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = c^2R^2 + 2E. \tag{18'}$$

$$r^2\dot{\theta} = l$$

Într-adevăr dacă mişcarea este plană ecuaţiile mişcării sînt

$$\ddot{x} = \frac{\partial U}{\partial x},\quad \ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Cum U depinde în cazul nostru prin ipoteză numai de r, rezultă că

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\frac{\partial U}{\partial x}\sin\theta + r\frac{\partial U}{\partial y}\cos\theta = 0.$$

Ori această ecuație se scrie

$$x\frac{\partial U}{\partial y} - y\frac{\partial U}{\partial x} = x\ddot{y} - y\ddot{x} = 0$$

și se poate integra luînd

$$x\dot{y} - y\dot{x} = r^2\dot{\theta} = l,$$

ceea ce constituie integrala ariilor. Denumirea vine din faptul că ariile descrise de raza vectoare OP unde O este originea și P este punctul de coordonate x, y în timpuri egale, sînt egale. Într-adevăr notînd cu dA aria triunghiului OPP' unde P' are coordonatele $x + dx$, $y + dy$ avem

$$2dA = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \\ dx & dy & 0 \end{vmatrix} = xdy - ydx = ldt,$$

ceea ce demonstrează denumirea de integrală a ariilor.

Să revenim la sistemul (18′). Dacă presupunem că $\dot{\theta} \neq 0$ deci dacă excludem mișcările rectilinii ce trec prin origine, deci presupunem $l \neq 0$, atunci putem elimina $\dot{\theta}$ și avem pentru r, ca funcție de θ, ecuația

$$\left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right]\frac{l^2}{r^4} = c^2R^2 + 2E. \tag{18''}$$

Să presupunem acum că pentru r îndeajuns de mare metrica (18) este de tip Minkowski. Este natural atunci să presupunem că pentru r tinzînd la infinit R^2 tinde la 1, deci că pentru valori ale lui r îndeajuns de mari avem

$$R^2 = 1 + \frac{k_1}{r} + \frac{k_2}{r^2} + \ldots + \frac{k_n}{r^n} + \ldots \tag{18'''}$$

seria din membrul al doilea fiind convergentă pentru $r > r_0$ unde r_0 este o constantă convenabil aleasă.

Într-adevăr aceasta corespunde faptului că noi presupunem materia concentrată în origine, deci că la infinit spațiul fizic devine spațiul lui Minkowski.

Să presupunem de asemenea că în formula (18‴), ținem seama numai de primii trei termeni deci că luăm

$$R^2 = 1 + \frac{2a}{c^2r} + \frac{b}{c^2r^2} \tag{19}$$

unde a, b sînt constante. Presupunem deci că integrăm ecuația (18′) cu R^2 dat de formula (19) și vrem să arătăm că aceasta revine a lua

$$R = \frac{p}{1 + e\cos\alpha\theta} \tag{19'}$$

unde p, e, α sînt constante. În adevăr derivînd avem

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{pe\,\alpha\sin\alpha\theta}{[1 + e\cos\alpha\theta]^2}$$

și prin urmare ecuația (18″) se scrie ținînd seama de (19)

$$l^2[e^2\alpha^2\sin^2\alpha\,\theta + (1 + e\cos\alpha\,\theta)^2] = p^2(c^2 + 2E) + 2ap(1 + e\cos\alpha\theta) + b[1 + e\cos\alpha\,\theta]^2.$$

Înlocuind deci $\sin^2\alpha\theta$ cu $1 - \cos^2\alpha\,\theta$ obținem o ecuație de gradul al doilea în $\cos\alpha\,\theta$, care trebuie să fie identic verificată. Egalînd cu zero coeficienții acestei ecuații obținem formulele:

$$l^2[e^2\alpha^2 + 1] = p^2[c^2 + 2E] + 2ap + b, \tag{19''}$$

$$l^2 = ap + b, \quad (1 - \alpha^2)e^2 = b.$$

Ultima ecuație ne spune că dacă $b = 0$, atunci $\alpha^2 = 1$ și invers. În acest caz însă curba definită de (19′) se scrie

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \tag{20}$$

și reprezintă o conică, originea fiind unul din focare.

Într-adevăr, putem scrie această ecuație sub forma

$$\sqrt{x^2 + y^2} = p - ex$$

și prin urmare ridicînd la pătrat obținem

$$x^2(1 - e^2) + y^2 + 2pex - p^2 = 0$$

adică o elipsă, o iperbolă sau o parabolă după cum, $e^2 < 1$, sau $e^2 > 1$, sau $e^2 = 1$. De asemenea se vede că originea este unul dintre focare căci raportul distanțelor unui punct al curbei la origine și la dreapta $x = p/e$

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\left|x - \frac{p}{e}\right|} = e$$

este o constantă.

Dacă $b \neq 0$, deci $\alpha^2 \neq 1$ se constată că ecuaţia (19') nu poate defini o conică, observînd de exemplu că punctul P al curbei nu revine în aceeaşi poziţie cînd θ variază de la 0 la 2π. Astfel, dacă notăm cu r_0 valoarea lui r pentru $\theta = 0$, şi cu r_1 valoarea lui r pentru $\theta = \pi$ şi cu r_2 valoarea lui r pentru $\theta = 2\pi$ avem:

$$r_0 = \frac{p}{1+e}, \quad r_1 = \frac{p}{1+e\cos\pi\alpha}, \quad r_2 = \frac{p}{1+e\cos 2\pi\alpha}$$

deci $r_0 \neq r_1 \neq r_2$ dacă $\alpha^2 \neq 1$.

Rezultă deci că o dreaptă ce trece prin origine întîlneşte curba în mai mult decît două puncte, deci curba nu este de gradul al doilea, deci nu este o conică.

Avem deci teorema:

Condiţia necesară şi suficientă ca traiectoriile metricei (18), (19) *să fie conice este ca b să fie zero.*

În acest caz potenţialul U al forţelor este dat de formula

$$U = \frac{e^2}{2} + \frac{a}{r},$$

astfel că derivata în direcţia razei vectoare, deci componenta forţei pe această direcţie se scrie

$$F_r = \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{a}{r^2}.$$

Punînd deci $a = fm_0$ unde m_0 este masa soarelui cînd presupunem masa planetei unitatea, se regăseşte legea gravitaţiei universale a lui Newton.

Să utilizăm însă acest caz pentru a explica curbarea razelor luminoase[1]. Trebuie să presupunem atunci că $E = 0$, pentru că traiectoriile luminii sînt în spaţiul V_4 geodezice de lungime nulă, deci trebuie să avem conform formulei (18)

$$\frac{c^2}{R^2}(\mathrm{d}x^4)^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$$

şi prin urmare, pentru $z = 0$ în coordonate polare, rezultă

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = c^2R^2.$$

[1] T. Levi-Civita, *The absolute differential calculus*, Blackie, Londra, 1927, p. 403.

Formulele (19''') ne dau

$$p = \frac{l^2}{a}, \quad e^2 = 1 + \frac{pc^2}{a}, \tag{20'}$$

ceea ce ne defineşte constantele p, e din ecuaţia (20) în funcţie de viteza luminii c şi de constantele a, l care au caracter mecanic.

Cum din prima formulă rezultă că p, a sînt de acelaşi semn rezultă că e^2 este mai mare ca unitatea.

Prin urmare ecuaţia $1 + e\cos\theta = 0$ are soluţii, deci există un unghi σ în aşa fel, ca să avem:

$$\cos\sigma = -\frac{1}{e}, \tag{20''}$$

deoarece $\frac{1}{e}$ este o cantitate mai mică ca unitatea. Pentru valorile

$$\theta = \sigma, \quad \theta = -\sigma$$

care satisfac ecuaţia (20''), raza vectoare r este infinită, deci curba de gradul al doilea (20) are ramuri care merg la infinit, prin urmare, această curbă este o hiperbolă, ale cărei asimptote fac între ele unghiul 2σ.

Avînd în vedere distanţele mari care separă o stea, care ne trimite o rază luminoasă, atît de Soare cît şi de Pămînt, unde este receptată raza luminoasă putem presupune că unghiul care măsoară deviaţia razelor luminoase, deci unghiul sub care se vede poziţia reală a stelei faţă de poziţia observată, este aproximativ unghiul exterior al asimptotelor hiperbolei, ca şi cum raza luminoasă ar veni pe una din asimptote pînă în centrul hiperbolei, şi de acolo pe cealaltă asimptotă. Ori, pentru asimptote este valabilă ecuaţia (20''), deci dacă σ este o soluţie, $-\sigma$ este o altă soluţie, astfel că unghiul exterior al asimptotelor este $\pi - 2\sigma$ şi avem:

$$\sin(\pi - 2\sigma) = \sin 2\sigma = 2\cos\sigma\sin\sigma$$

astfel că avem, ţinînd seama de formula (20'')

$$\sin 2\sigma = \frac{2}{e}\sqrt{1 - \frac{1}{e^2}}$$

şi pentru că e este foarte mare putem neglija $1/e^2$, deci putem lua $\sin 2\sigma = 2/e$ sau, dacă facem o nouă aproximaţie, avem, $\sigma = 1/e$. Ţinînd seama de a doua formulă (20'), putem lua mai departe,

$$\sigma = \frac{1}{e}\sqrt{\frac{a}{p}}$$

abstracție făcînd de termeni de ordinul lui $\frac{1}{c^2}$, observațiile făcute în timpul eclipselor de Soare au arătat că acest unghi este de circa 1,7″, ceea ce ne determină constanta $a = fm_0$.

Teoria relativității generale permite deci explicarea fenomenului curbării razelor luminoase, cînd ele trec prin imediata vecinătate a soarelui, fenomen ce nu poate fi explicat în mecanica clasică.

Să presupunem acum că $b \neq 0$, $\alpha^2 \neq 1$. În acest caz ecuațiile (19″) ne dau

$$\alpha^2 = 1 - \frac{b}{l^2}, \quad p = \frac{\alpha^2 l^2}{a}, \quad e^2 = 1 + \frac{p}{a}(c^2 + 2E).$$

Rezultă deci că aceste ecuații ne determină α, p și e în funcție de constantele mecanice l, a, b.

Ținînd seama că p și a sînt de același semn, ultima formulă ne spune că e^2 este mai mic ca unitatea numai dacă $c^2 + 2E < 0$. Rezultă deci că E trebuie să fie o cantitate negativă și mai mare în valoare absolută ca $c^2/2$. În acest caz la limită, deci pentru α^2 tinzînd la 1, curba (19′) este o elipsă. În general însă, deci pentru $\alpha^2 \neq 1$, curba (19′) nu este o elipsă însă este o curbă situată la distanța finită deoarece numitorul $1 + e\cos\alpha\theta$ nu se poate anula.

Să observăm acum că maximile și minimile lui r ca funcție de θ sînt date de valorile ce anulează derivata lui r în raport cu θ, deci de valorile

$$0, \frac{\pi}{\alpha}, \frac{2\pi}{\alpha}, \ldots, \frac{k\pi}{\alpha},$$

unde k este un număr întreg. Ori este ușor de văzut că pentru k par avem valori minime. Deci punctele de coordonate polare

$$P_0\left[\frac{1}{1+e}, 0\right], \quad P_1\left[\frac{1}{1+e}, \frac{2\pi}{\alpha}\right], \ldots, P_n\left[\frac{1}{1+e}, \frac{2n\pi}{\alpha}\right], \ldots \tag{21}$$

în cazul în care ne preocupă, mișcarea unei plante P în timpul soarelui S, constituie cîte un perhileu (punct în care planeta este în poziția cea mai apropiată de soare). Dacă ne referim la primele puncte P_0 și P_1, presupunînd $\alpha^2 > 1$, atunci punctul P_1 este atins după ce θ face ceva mai mult ca o rotație completă și unghiul între OP_0 și OP_1 este dat de formula

$$\sigma = \frac{2\pi}{\alpha} - 2\pi.$$

Dacă presupunem α^2 foarte aproape de 1 atunci b/l^2 este foarte mic astfel că putem neglija termenii de ordin superior, deci avem

$$\alpha = \sqrt{1 - \frac{b}{l^2}} = 1 - \frac{b}{2l^2}, \quad \sigma = \frac{b}{l^2}.$$

Pentru a calcula l^2 să observăm că pentru $\alpha = 1$, maximul r_1 a lui r se obține dînd lui θ valoarea π, deci avem

$$r_1 = \frac{p}{1-e}.$$

Dacă facem suma lui r_0 cu r_1 obținem

$$r_0 + r_1 = \frac{2p}{1-e^2},$$

deci semiaxa mare a_0 a elipsei este dată de formula

$$a_0 = \frac{p}{1-e^2}$$

și formula (20′) ne dă

$$l^2 = pa = a_0(1-e^2)a$$

și prin urmare avem

$$\sigma = \frac{\pi b}{a_0(1-e^2)a} = \frac{\pi b}{a_0(1-e^2)fm_0}. \tag{21'}$$

Deci dacă prin observații putem cunoaște unghiul σ, rezultă o valoare a constantei b.

Observațiile arată că pentru planeta Mercur, deci a_0 are cea mai mică valoare, mișcarea periheliului în 100 de ani însumează 42″, în timp ce pentru celelalte planete mai depărtate unghiurile sînt prea mici pentru a fi puse în evidență prin observații.

În concluzie teoria relativității reușește să explice atît curbarea razelor luminoase cît și mișcarea periheliului lui Mercur ca mișcări datorite curburii spațiului cu patru dimensiuni (x, y, z, t) dat de formulele (18″), (19) deci fără să introducă forțe. Aceste explicații au ca echivalent în spațiul euclidian $E_3(x, y, z)$ considerarea unor forțe centrale ce derivă dintr-un potențial

$$U = \frac{2fm_0}{r}$$

în cazul traiectoriilor luminoase și forțe ce derivă dintr-un potențial

$$U = \frac{2fm_0}{r} + \frac{b}{r^2}$$

unde b este dat de formula (21').

În primul caz, așa cum am observat mai sus, utilizăm legea gravitației universale a lui Newton, în timp ce în al doilea caz forțele conțin un termen ce depinde de $1/r^2$ și un altul ce depinde de $1/r^3$.

§ 5. ECUAȚIILE GRAVITAȚIONALE ALE LUI EINSTEIN

Vom încerca acum să exprimăm, utilizînd mijloace matematice cît mai simple, ecuațiile gravitaționale ale lui Einstein. Pentru aceasta vom presupune, ca și în § 3, că avem un spațiu cu n dimensiuni raportat la un sistem de coordonate $x^1, \ldots, x^n$. În cazul teoriei relativității, numărul n este egal cu 4, însă cum am mai spus sînt unele teorii unitare în care n are valoarea 5 sau 6 sau o valoare mai mare, de aceea vom presupune pentru moment că n este un număr întreg pozitiv oarecare.

Să presupunem acum că în spațiul nostru cu n dimensiuni considerăm n forme cu diferențiale totale

$$ds^a = \lambda_i^a dx^i \quad (a = 1, \ldots, n, \; i = 1, \ldots, n), \tag{22}$$

unde λ_i^a sînt funcții de variabilele $x^1, \ldots, x^n$ și unde determinantul $\lambda = |\lambda_i^a|$ este diferit de zero, cel puțin într-o regiune R a spațiului în care sînt valabile considerațiile noastre. Rezultă deci că în regiunea R unde $\lambda \neq 0$ putem rezolva ecuațiile (22) în raport cu dx^i și avem formule de forma:

$$dx^i = \mu_a^i ds^a. \tag{22'}$$

Dacă $\lambda_i^a = \delta_i^a$, unde δ este simbolul lui Kronneker, deci este egal cu 1 dacă $a = i$ și egal cu zero dacă $a \neq i$, deci dacă formulele (22) se scriu:

$$ds^a = dx^a,$$

atunci avem:

$$s^a = x^a + c^a,$$

unde c^a sînt constante.

Rezultă atunci că dacă presupunem toate ds^a nule afară de una, de exemplu ds^1, obținem drepte paralele cu axa x^1. Aceste drepte constituie ceea ce se cheamă o congruență de drepte, căci prin fiecare punct al spațiului trece una și numai una din aceste drepte.

În general, dacă ds^a sînt date de formulele (22), presupunînd toate ds^a nule afară de una, de exemplu ds^1, formulele (22') ne dau $dx^i = \mu_1^i ds^1$ și se obține o familie de curbe care formează o congruență de curbe, deci o familie de curbe care are proprietatea că printr-un punct din spațiu sau dintr-o anumită regiune trece o curbă a familiei și numai una, pentru care vectorul tangent are parametrii μ_1^i. De exemplu, cercurile cu centrul în origine dintr-un plan Oxy, deci curbele

$$x^2 + y^2 = R^2$$

constituie o congruență de curbe pentru orice punct diferit de origine, căci prin orice astfel de punct trece un cerc cu centrul în origine și numai unul.

A se da deci formulele (22) înseamnă a se da un sistem de congruențe de curbe pe care le putem numi congruente (λ^a) $(a = 1, \ldots, n)$ și sistemul se zice *sistem independent de congruențe*, deoarece tangentele la aceste curbe într-un punct formează un sistem independent, așa cum sînt în cazul $a = 3$ muchiile unui cub ce trec printr-un vîrf al cubului.

Rezultă deci că introducerea congruențelor constituie o generalizare a noțiunii de coordonate și coincide cu aceasta numai în cazul în care formele ds^a sînt diferențiale totale exacte, deci în cazul în care λ_i^a, care se numesc *momentele sistemului de congruențe*, sînt derivatele parțiale ale unor funcții f^a, deci avem:

$$\lambda_i^a = \frac{\partial f^a}{\partial x^i}.$$

Dacă aceste formule sînt verificate pentru un anumit indice a, zicem că ds^a cu acest indice este o diferențială totală exactă. Derivînd ecuațiile de mai sus în raport cu x^j $(j \neq i)$, avem:

$$\frac{\partial \lambda_i^a}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 f^a}{\partial x^j \partial x^i}.$$

Schimbînd i cu j și scăzînd rezultă, ținînd seama că derivatele de ordinul al doilea ale unei funcții sînt simetrice,

$$\frac{\partial \lambda_i^a}{\partial x^j} - \frac{\partial \lambda_j^a}{\partial x^i} = 0. \tag{22''}$$

Rezultă deci că dacă forma ds^a este o diferențială totală exactă, atunci sînt verificate ecuațiile (22″) și reciproca este de asemenea adevărată.

Dacă formulele (22″) sînt verificate oricare ar fi indicii a, i, j, atunci formulele (22) se scriu:

$$ds^a = df^a, \quad s^a = f^a(x^1, \ldots, x^n) + c^a$$

și congruențele (λ^a), de exemplu congruența (λ^1), se obțin ca intersecție a hipersuprafețelor:

$$f^a(x^1, \ldots, x^n) = k^a, \quad (a = 2, \ldots, n),$$

unde k^a a sînt constante.

Dacă ecuațiile (22″) nu sînt verificate, ceea ce constituie cazul general, atunci cantitățile

$$w^a_{bc} = \left(\frac{\partial\lambda^a_i}{\partial x^j} - \frac{\partial\lambda^a_j}{\partial x^i}\right)\mu^i_b\mu^j_c \tag{23}$$

nu sînt toate nule și invers, dacă aceste cantități nu sînt toate nule, ecuațiile (22″) nu sînt verificate, deoarece avem formulele:

$$\frac{\partial\lambda^a_i}{\partial x^j} - \frac{\partial\lambda^a_j}{\partial x^i} = w^a_{bc}\lambda^b_i\lambda^c_j. \tag{23'}$$

Să presupunem acum că spațiul nostru cu n dimensiuni este riemannian, deci că posedă o metrică dată de o formă pătratică.

Putem întotdeauna să presupunem că această metrică este dată de o formulă de forma:

$$\psi = \varepsilon_a(ds^a)^2 = \varepsilon_1(ds^1)^2 + \ldots + \varepsilon_n(ds^n)^2, \tag{24}$$

unde $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ sînt egale cu 1 sau -1.

Rezultă deci că dacă $ds^1, \ldots, ds^n$ sînt diferențiale totale exacte, deci dacă toate cantitățile w^a_{bc} sînt nule, spațiul este euclidian sau pseudoeuclidian, după cum ε_a sînt toți pozitivi sau nu.

Să observăm acum că prin formula (24) cantitățile $ds^1, \ldots, ds^n$ sînt determinate, abstracție făcînd de o transformare ortogonală

$$d\bar{s}^a = c^a_b ds^b, \quad c^a_b c^a_c = \delta^b_c$$

dacă ε_a sînt toți de același semn sau de o transformare pseudoortogonală, deci în care c^a_b sînt legați prin relațiile

$$\varepsilon_a c^a_b c^a_c = \varepsilon_b \delta^b_c.$$

Dacă sîntem în cazul particular în care $n = 2$, avem două cazuri de considerat, după cum ε_a sînt de același semn sau nu, deci avem cazurile:

$$\psi_1 = (ds^1)^2 + (ds^2)^2, \quad \psi_2 = (ds^1)^2 - (ds^2)^2. \tag{24'}$$

În primul caz metrica este pozitiv definită și în al doilea caz metrica este indefinită. În primul caz ds^1, ds^2 sînt determinate abstracție făcînd de o transformare ortogonală

$$\begin{aligned} d\bar{s}^1 &= \cos\theta\, ds^1 - \sin\theta\, ds^2 \\ d\bar{s}^2 &= \sin\theta\, ds^1 + \cos\theta\, ds^2, \end{aligned} \tag{25}$$

unde θ este o funcție oarecare de variabilele x^1, x^2, iar în al doilea caz ds^1, ds^2 sînt determinate abstracție făcînd de o transformare hiperbolică (sau pseudoortogonală)

$$\begin{aligned} d\bar{s}^1 &= \operatorname{ch}\theta\, ds^1 + \operatorname{sh}\theta\, ds^2 \\ d\bar{s}^2 &= \operatorname{sh}\theta\, ds^1 + \operatorname{ch}\theta\, ds^2, \end{aligned} \tag{25'}$$

unde ch θ și sh θ sînt definite de formulele (31′), capitolul II.

Ținînd seama că prin fiecare punct al spațiului trece cîte o curbă din congruențele (λ) și că tangentele la aceste curbe formează în fiecare punct un sistem de vectori independenți, rezultă că un vector oarecare v al spațiului este determinat dacă se cunosc în fiecare punct componentele sale pe vectorii $t_1, \ldots, t_n$ definiți de tangentele la congruențele (λ) în P (fig. 116).

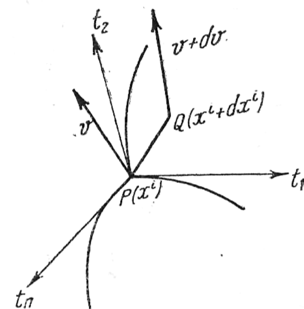


Fig. 116

Să notăm cu v^a ($a = 1, \ldots, n$) aceste componente. Dacă notăm cu v^i componentele aceluiași vector față de coordonatele $x^1, \ldots, x^n$, atunci avem formulele:

$$v^a = \lambda^a_i v^i, \quad v^i = \mu^i_a v^a.$$

Să presupunem că luăm în considerare un alt punct Q al spațiului, foarte aproape de punctul $P(x^1, \ldots, x^n)$, avînd deci coordonatele de forma $Q(x^1 + dx^1, \ldots, x^n + dx^n)$ în care $dx^1, \ldots, dx^n$ sînt cantități foarte mici. Rezultă că punctul Q este definit în raport cu P de cantitățile $dx^1, \ldots, dx^n$, sau dacă vrem, de cantitățile $ds^a = \lambda^a_i dx^i$, unde înțelegem că λ^a_i sînt calculate în punctul P. Putem deci considera că punctele P, Q definesc un vector ale cărui componente pe sistemul de congruențe sînt ds^a. Notînd cu $v + dv$ vectorul

v în punctul Q, să presupunem că dv^a sînt definite de formulele de forma:

$$dv^a = \gamma^a_{bc} v^b ds^c. \tag{26}$$

Aceasta înseamnă că în trecerea de la P la Q variațiile componentelor dv^a sînt date de formule care depind de punctul P, dacă γ^a_{bc} depind de $x^1, \ldots, x^n$, de vectorul dat v și de vectorul PQ. Dacă cantitățile γ^a_{bc} sînt nule, atunci dv^a sînt de asemenea nule, deci vectorul V are în punctul Q aceleași componente față de sistemul de congruențe (λ) ca și în punctul P, deci a rămas paralel cu el însuși față de sistemul nostru de congruențe, știut fiind că în spațiul euclidian, doi vectori sînt paraleli dacă au aceleași componente față de un sistem de axe dat.

Vom continua să zicem că vectorul v s-a transportat prin paralelism din P în Q, dacă avem verificate ecuațiile (26) cu γ^a_{bc} funcții oarecare de variabilele $x^1, \ldots, x^n$ și vrem să arătăm că într-un spațiu Riemann V_n există un transport paralel intrinsec legat de spațiu. Acesta este transportul paralel al lui Levi-Civita[1], caracterizat de faptul că închide paralelogramele infinitezimale și consevă lungimile.

Într-adevăr, să presupunem că avem două puncte apropiate de P, punctul Q $(x^1 + dx^1, \ldots, x^n + dx^n)$ și punctul $S(x^1 + \delta x^1, \ldots, x^n + \delta x^n)$ (fig. 117), deci vectorii $\overrightarrow{PQ}$ și $\overrightarrow{PS}$ au componentele ds^a, δs^a față de sistemul de congruențe (λ).

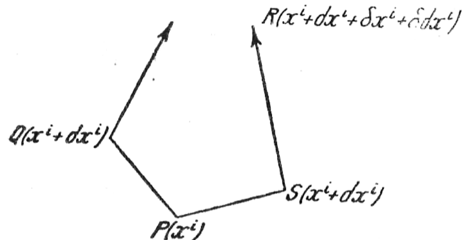


Fig. 117

Să transportăm prin paralelism vectorul $\overrightarrow{PQ}$ de-a lungul vectorului $\overrightarrow{PS}$ și fie R extremitatea acestui vector. R are atunci coordonatele $R(x^i + dx^i + \delta x^i + \delta dx^i)$. Să transportăm acum vectorul $\overrightarrow{PS}$ de-a lungul vectorului $\overrightarrow{PQ}$ și fie T extremitatea acestui vector. T are atunci coordonatele $T(x^i + \delta x^i + dx^i + d\delta x^i)$ și pentru ca R și T să coincidă, deci ca paralelogramul să se închidă, trebuie să avem:

$$\delta dx^i - d\delta x^i = 0.$$

[1] T. Levi-Civita (1873–1941), matematician și mecanician, profesor la Universitatea din Padova și Roma, a descoperit în 1917 paralelismul ce-i poartă numele. Împreună cu G. Ricci este creatorul calculului diferențial absolut și a contribuit prin lucrările sale la sistematizarea teoriei relativității.

Ținînd însă seama de formulele (22), avem:

$$\delta ds^a - d\delta s^a = \left(\frac{\partial \lambda^a_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \lambda^a_j}{\partial x^i}\right) dx^i \delta x^j = w^a_{bc} dx^b \delta s^c, \tag{26'}$$

unde w^a_{bc} sînt date de formulele (23).

Cum pe de altă parte prin transportul paralel al vectorilor $\overrightarrow{PQ}$ și $\overrightarrow{PS}$ avem, în baza formulelor (26),

$$\delta ds^a = \gamma^a_{bc} ds^b \delta s^c$$

$$d\delta s^a = \gamma^a_{bc} \delta s^b ds^c,$$

rezultă că înlocuind în formula (26'), obținem:

$$\gamma^a_{bc} - \gamma^a_{cb} = w^a_{bc}. \tag{27}$$

Avem deci teorema:

Transportul paralel (26) închide paralelogramele infinitezimale, dacă γ^a_{bc} verifică ecuațiile (27) și invers.

Să ținem seama acum că lungimea ds a vectorului $\overrightarrow{PQ}$ este dată de formula:

$$ds^2 = \varepsilon_a (ds^a)^2,$$

astfel că aplicînd operatorul δ, avem formula:

$$ds\,\delta ds = \varepsilon_a ds^a \delta ds^a = (\varepsilon_a \gamma^a_{bc} + \varepsilon_b \gamma^b_{ac})\, ds^a ds^b \delta s^c.$$

Transportul paralel conservă deci lungimile, dacă avem condițiile:

$$\varepsilon_a \gamma^a_{bc} + \varepsilon_b \gamma^b_{ac} = 0, \tag{28}$$

unde a, b, c sînt indici ficși.

Să înmulțim ecuațiile (27) cu ε_a și să considerăm combinația

$$\varepsilon_a(\gamma^a_{bc} - \gamma^a_{cb}) + \varepsilon_a(\gamma^b_{ca} - \gamma^b_{ac}) + \varepsilon_c(\gamma^c_{ba} - \gamma^c_{ab}) =$$

$$= \varepsilon_a w^a_{bc} + \varepsilon_b w^b_{ca} + \varepsilon_c w^c_{ba}$$

ținînd seama de formulele (28) obținem că primul membru al acestei combinații este egal cu $2\varepsilon_a \gamma^a_{bc}$. Înmulțind cu $\frac{\varepsilon_a}{2}$ și ținînd seama că $\varepsilon_a^2 = 1$, căpătăm formula:

$$\gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}(w^a_{bc} + \varepsilon_a \varepsilon_b w^b_{ca} + \varepsilon_a \varepsilon_c w^c_{ba}), \tag{29}$$

și prin urmare coeficienții γ^a_{bc} din transportul paralel (26) sînt complet determinați. Avem deci teorema:

Transportul paralel a lui Levi-Civita este determinat în sistemul de congruențe (λ) *de formulele* (29).

Faptul că spațiul V_n posedă un transport paralel al vectorilor se exprimă spunînd că spațiul posedă o conexiune afină și că γ^a_{bc} sînt componentele acestei conexiuni în sistemul de congruențe (λ). Aceste componente sînt invariante la o schimbare de coordonate, însă ele se schimbă, dacă schimbăm sistemul de congruențe (λ), menținînd însă forma pătratică (24) neschimbată.

Fiind date componentele conexiunii γ^a_{bc}, putem să scriem cantitățile:

$$\gamma^a_{bcd} = \frac{\partial \gamma^a_{bc}}{\partial s^d} - \frac{\partial \gamma^a_{bd}}{\partial s^c} + \gamma^a_{fc}\, \gamma^f_{bd} - \gamma^a_{fd}\, \gamma^f_{bc} + \gamma^a_{bf}\, (\gamma^f_{cd} - \gamma^f_{dc}) \qquad (29')$$

unde am pus $\frac{\partial}{\partial s^a} = \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot \mu^i_a$,

cantități care constituie componentele tensorului de curbură al spațiului V_n.

Dacă aceste componente sînt nule, spațiul este euclidian și invers. Într-adevăr, dacă spațiul este euclidian sau pseudoeuclidian, putem alege un sistem de congruențe în așa fel, ca ds^a să fie diferențiale totale exacte, deci ca w^a_{bc} să fie nule; rezultă că γ^a_{bc} sînt nule și prin urmare γ^a_{bcd} sînt de asemenea nule. Se arată că inversa este de asemenea adevărată, deci că dacă γ^a_{bcd} sînt nule, putem să alegem un sistem de congruențe ortogonale sau pseudoortogonale în așa fel ca γ^a_{bc}, w^a_{bc} să fie zero, deci ca ds^a să fie diferențiale totale exacte.

Din formulele (29') ce definesc tensorul de curbură al spațiului V_n, denumit și *tensorul lui Riemann* care este un tensor de ordinul patru contravariant în indicele a și covariant în indicii b, c, d, se obține un tensor de ordinul al doilea, contractînd în raport cu indicii a, c, deci făcînd $c = a$ și sumînd în raport cu a de la 1 la n. Fie r_{bd} acest tensor, pe care îl vom numi *tensorul lui Ricci*. Avem:

$$r_{bd} = \gamma^a_{bad} = \frac{\partial \gamma_b}{\partial s^d} - \frac{\partial \gamma^a_{bd}}{\partial s^a} + \gamma_f\, \gamma^f_{bd} - \gamma_{bd}, \qquad (30)$$

unde am pus:

$$\gamma_b = \gamma^a_{ba}, \quad \gamma_{bd} = \gamma^a_{bf}\gamma^f_{da}. \qquad (30')$$

Înmulțind r_{bd} cu ε_a și făcînd $d = b$ se obține invariantul de curbură R, sau invariantul lui Ricci

$$R = \varepsilon_b r_{bb}, \qquad (30'')$$

și atunci ecuațiile gravitaționale ale lui Einstein se scriu față de sistemul de congruențe (λ)

$$r_{bd} - \frac{R}{2}\, \varepsilon_b \delta^b_d = -\, k t_{bd}, \qquad (31)$$

unde k este o constantă și t_{bd} sînt componentele tensorului de energie pe sistemul de congruențe (λ).

Într-un sistem de coordonate ecuațiile (31) se scriu[1]

$$R_{ij} - \frac{R}{2}\, a_{ij} = -\, kT_{ij}, \ (i, j = 1, 2, \ldots, n) \qquad (31')$$

unde avem evident

$$R_{ij} = r_{bd}\lambda^b_i\lambda^d_j, \quad T_{ij} = t_{bd}\lambda^b_i\lambda^d_j.$$

Pentru $n = 4$, metrica are forma canonică (7), iar ecuațiile (31) se scriu:

$$R_{hh} + \frac{R}{2} = -\, kT_{hh}, \ R_{hl} = -\, kT_{hl}, \ (h, l = 1, 2, 3) \qquad (31'')$$

$$R_{44} - \frac{R}{2} = -\, kT_{44}, \ R_{4h} = -\, kT_{4h}$$

și constituie deci zece ecuații. De asemenea (31'') definesc zece ecuații.

Introducerea acestor zece ecuații a fost făcută de Einstein pentru a determina cei zece coeficienți ai unei forme pătratice în patru variabile

$$a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{14}, a_{24}, a_{34}, a_{44},$$

care în cazul nostru se exprimă cu ajutorul momentelor λ^a_i prin formulele:

$$a_{ij} = \lambda^4_i\lambda^4_j - \lambda^1_i\lambda^1_j - \lambda^2_i\lambda^2_j - \lambda^3_i\lambda^3_j.$$

Presupunînd tensorul T cunoscut din considerații fizice, ecuațiile (31'') sînt în acești coeficienți ecuații cu derivate parțiale de ordinul

---

[1] A. Lichnerowicz, *Theories relativistes de la gravitation et de l'électromagnetisme*, Masson, Paris, 1955 p. 11.

al doilea şi problema principală a teoriei relativităţii este de a determina aceşti coeficienţi, problemă ce este în general greu de rezolvat şi se cunosc soluţii ale ecuaţiilor (31″) numai în cazuri speciale.

Unul din aceste cazuri este acela în care se presupune că există în spaţiu un sistem de coordonate ortogonale, deci un sistem de coordonate în care cantităţile a_{ij} $(i \neq j)$ sînt nule, deci că metrica se scrie:

$$ds^2 = a_{44}(dx^4)^2 + a_{11}(dx^1)^2 + a_{22}(dx^2)^2 + a_{33}(dx^3)^2. \quad (32)$$

unde cantităţile a_{11}, a_{22}, a_{33} sînt negative. Putem atunci să luăm ca sistem de congruenţe (λ) sistemul pentru care avem:

$$ds^1 = \rho_1 dx^1, \quad ds^2 = \rho_2 dx^2, \quad ds^3 = \rho_3 dx^3, \quad ds^4 = \rho^4 dx^4 \quad (32')$$

unde ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 sînt definite de formulele:

$$\rho_1^2 = -a_{11}, \quad \rho_2^2 = -a_{22}, \quad \rho_3^2 = -a_{33}, \quad \rho_4^2 = a_{44} \quad (32'')$$

Se poate spune în acest caz că metrica spaţiului (32) se obţine din metrica spaţiului pseudoeuclidian al relativităţii restrînse (13′), prin dilataţii de-a lungul fiecăreia din coordonate.

Dacă presupunem că sîntem într-unul din cele mai simple cazuri, în care a_{11}, a_{22}, a_{33} sînt egali cu unitatea, deci nu există dilataţii de-a lungul axelor spaţiale x^1, x^2, x^3, în timp ce avem $a_{44} = c^2 - 2U$, unde c este viteza luminii şi unde U este o funcţie oarecare de variabilele x^1, x^2, x^3, dăm din nou peste cazul considerat în § 4, care ne-a permis să explicăm curbarea traiectoriilor razelor luminoase.

În cadrul dezvoltării ulterioare a teoriei generale clasice a relativităţii, realizarea cea mai importantă este deducerea din ecuaţiile cîmpului gravific a ecuaţiilor mişcării particulei neutre; această teorie a fost iniţiată de A. Einstein, J. Grommer şi G. Darmois (1927) şi apoi generalizată de A. Einstein, L. Infeld, B. Hoffmann, I. Schild etc. şi sub altă formă de V. Fok şi colaboratorii săi N. Petrova, I. Fisctengoltz etc. De asemenea, A. Papapetrou a determinat ecuaţiile mişcării particulei electrizate.

Aceste lucrări au arătat că ecuaţiile mişcării pe geodezică a particulei se pot deduce din legile de conservare şi transformare ale energiei şi impulsului şi deci sînt o consecinţă a ecuaţiilor cîmpului gravific. În timp ce particula neîncărcată se mişcă pe o geodezică în spaţiul-timp riemannian V_4, s-a arătat că particula încărcată (de pildă, electrizată) se mişcă pe o geodezică dintr-un spaţiu cu mai multe dimensiuni[1].

---

[1] Vezi G. Vrănceanu, A. Popovici, *Fundamentele teoriei generale a relativităţii*, în "Studii şi cercetări matematice" Bucureşti, 1964.

§ 6. SOLUŢII PARTICULARE

Să considerăm unele soluţii particulare ale ecuaţiilor gravitaţionale ale lui Einstein. Pentru aceasta să introducem mai întîi noţiunea de metrică cu simetrie sferică. Pentru a obţine o asemenea metrică vom pleca de la formulele (20^{IV}) din capitolul II

$$x = r\cos\varphi\cos\theta, \quad y = r\sin\varphi\cos\theta, \quad z = r\sin\theta \quad (33)$$

care reprezintă trecerea de la coordonate carteziene ortogonale din spaţiul euclidian E_3, la coordonate sferice, unde φ, θ sînt longitudinea şi latitudinea, iar r este raza vectoare, deci distanţa de la origine la punctul $P(x, y, z)$. Asemenea coordonate sînt deci valabile pentru orice punct P diferit de origine. Pentru origine $r = 0$, însă θ, φ sînt nedeterminate. În coordonate sferice metrica spaţiului euclidian E_3 se scrie:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \cos^2\theta d\varphi^2). \quad (33')$$

Ţinînd seama că faţă de orice rotaţie în jurul originii, cantităţile

$$dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad (33'')$$
$$rdr = xdx + ydy + zdz$$

sînt invariante, rezultă că obţinem o metrică generală dl^2 în spaţiul (x, y, z) care să rămînă invariantă la orice rotaţie în jurul originii, dacă luăm:

$$dl^2 = A^2 dR^2 + R^2[d\theta^2 + \cos\theta^2 d\varphi^2], \quad (33''')$$

unde A şi R sînt funcţii numai de r. Într-adevăr, ţinînd seama de (33′), (33″) această metrică se scrie:

$$dl^2 = \frac{R^2}{r^2}[dx^2 + dy^2 + dz^2] + \frac{A^2R_r^2r^2 - R^2}{r^4}[xdx + ydy + zdz]^2$$

şi prin urmare depinde numai de cantităţile (33″). Reciproca este de asemenea adevărată, deci dacă o metrică are simetrie sferică, atunci ea este de forma (33‴).

Să presupunem acum că asociem metricei (33‴) o metrică relativistă dată de formula:

$$ds^2 = V^2(dx^4)^2 - dl^2,$$

unde V^2 este de asemenea o funcţie numai de r şi să scriem pentru această metrică ecuaţiile lui Einstein. Punînd

$$r = x^1, \quad \theta = x^2, \quad \varphi = x^3,$$

obținem

$$ds^2 = V^2(dx^4)^2 - A^2(dx^1)^2 - (x^1)^2[(dx^2)^2 + \cos^2 x^2 (dx^3)^2] \tag{34}$$

unde V, A depind numai de variabila x^1.

Metrică cu simetrie sferică generală. Se poate considera o metrică cu simetrie sferică mai generală decît aceea dată de formula (34), luînd

$$d\sigma^2 = V^2(dx^4)^2 - A^2(dx^1)^2 - B^2[(dx^2)^2 + \cos^2 x^2 (dx^3)^2] \tag{34'}$$

unde V, A, B sînt funcțiuni de x^1 și x^4 deci obținem o metrică cu simetrie sferică obișnuită dacă x^4 este constant. Această metrică este deci o metrică de forma

$$d\sigma^2 = a_{11}(dx^1)^2 + a_{22}(dx^2)^2 + a_{33}(dx^3)^2 + a_{44}(dx^4)^2$$

deci pentru care coeficienții a_{ij} $(i \neq j)$ sînt toți nuli, ceea ce înseamnă că hipersuprafețele $x^i = c^i$ sînt ortogonale, două cîte două[1]).

Pentru o asemenea metrică avem formulele

$$a^{ii} = \frac{1}{a_{ii}}, \quad \left|\begin{matrix} k \\ i\;i \end{matrix}\right| = -\frac{1}{2a_{kk}} \cdot \frac{\partial a_{ii}}{\partial x^k} \; (i \neq k), \quad \left|\begin{matrix} i \\ i\;l \end{matrix}\right| = \frac{1}{2a_{ii}} \cdot \frac{\partial a_{ii}}{\partial x^l}$$

iar simbolurile lui Christoffel cu trei indici distincți sînt toți nuli.

Ținînd seama de metrica (34′) rezultă că singurii coeficienți $\left|\begin{matrix} i \\ j\;k \end{matrix}\right|$ nenuli sînt

$$\left|\begin{matrix} 1 \\ 2\;2 \end{matrix}\right| = -\frac{BB_1}{A^2}, \quad \left|\begin{matrix} 1 \\ 3\;3 \end{matrix}\right| = -\frac{BB_1}{A^2}\cos^2 x^2, \quad \left|\begin{matrix} 1 \\ 4\;4 \end{matrix}\right| = \frac{VV_1}{A^2}, \; B_i = \frac{\partial B}{\partial x^i},$$

$$\left|\begin{matrix} 2 \\ 3\;3 \end{matrix}\right| = \sin x^2 \cos x^2, \quad \left|\begin{matrix} 4 \\ 1\;1 \end{matrix}\right| = \frac{AA_4}{V^2}, \quad \left|\begin{matrix} 4 \\ 2\;2 \end{matrix}\right| = \frac{BB_4}{V^2}, \quad \left|\begin{matrix} 4 \\ 3\;3 \end{matrix}\right| = \frac{BB_4}{V^2}\cos^2 x^2, \tag{34''}$$

$$\left|\begin{matrix} 1 \\ 1\;1 \end{matrix}\right| = \frac{A_1}{A}, \quad \left|\begin{matrix} 4 \\ 4\;4 \end{matrix}\right| = \frac{V_4}{V}, \quad \left|\begin{matrix} 2 \\ 2\;1 \end{matrix}\right| = \frac{B_1}{B}, \quad \left|\begin{matrix} 3 \\ 3\;1 \end{matrix}\right| = \frac{B_1}{B}, \quad \left|\begin{matrix} 4 \\ 4\;1 \end{matrix}\right| = \frac{V_1}{V},$$

$$\left|\begin{matrix} 1 \\ 1\;4 \end{matrix}\right| = \frac{A_4}{A}, \quad \left|\begin{matrix} 2 \\ 2\;4 \end{matrix}\right| = \frac{B_4}{B}, \quad \left|\begin{matrix} 3 \\ 3\;4 \end{matrix}\right| = \frac{B_4}{B} \left|\begin{matrix} 3 \\ 3\;2 \end{matrix}\right| = -\operatorname{tg} x^2.$$

Notînd cu p_k conexiunea contractată

$$p_k = \left|\begin{matrix} i \\ i\;k \end{matrix}\right|$$

[1]) Un caz particular al metricilor cu simetrie sferică generală este acela în care presupunem că V, A, B nu depind de variabila x^1. Pentru scufundări ale acestor metrici se poate vedea D. Smaranda, Immersion d'un modèle d'univers, Bull. Sor. Royale Siège, 1967, Nr. 3–4.

rezultă formulele

$$p_1 = \frac{A_1}{A} + \frac{2B_1}{B} + \frac{V_1}{V}, \quad p_2 = -yx^2, \quad p_3 = 0, \quad p_4 = \frac{A_4}{A} + \frac{2B_4}{B} + \frac{V_4}{V}. \tag{34'''}$$

Ținînd seama că simbolurile lui Riemann de a doua speță se scriu

$$R^i_{jkl} = -\frac{\partial \left|\begin{matrix} i \\ j\;k \end{matrix}\right|}{\partial x^l} + \frac{\partial \left|\begin{matrix} i \\ j\;e \end{matrix}\right|}{\partial x^k} + \left|\begin{matrix} i \\ j\;k \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} s \\ j\;l \end{matrix}\right| - \left|\begin{matrix} i \\ s\;l \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} s \\ j\;k \end{matrix}\right|$$

rezultă că tensorul lui Ricci este dat de formulele

$$R_{jl} = -\frac{\partial p_k}{\partial x^l} + \frac{\partial \left|\begin{matrix} i \\ j\;l \end{matrix}\right|}{\partial x^i} + p_s \left|\begin{matrix} s \\ j\;l \end{matrix}\right| - p_{jl}$$

unde am pus

$$p_{jl} = \left|\begin{matrix} s \\ i\;j \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} i \\ s\;l \end{matrix}\right|.$$

Cum în cazul nostru simbolurile $\left|\begin{matrix} i \\ j\;l \end{matrix}\right|$ cu trei indici distincți sînt nuli, rezultă că avem

$$p_{jl} = \sum_i \left|\begin{matrix} i \\ i\;j \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} i \\ i\;l \end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix} i \\ j\;l \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} l \\ l\;j \end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix} j \\ l\;l \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} l \\ j\;j \end{matrix}\right| (j \neq l)$$

$$p_{jj} = \sum_i \left[\left|\begin{matrix} i \\ i\;j \end{matrix}\right|^2 + 2\left|\begin{matrix} j \\ i\;j \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} i \\ j\;j \end{matrix}\right|\right.$$

și prin urmare pentru $j = l$ avem

$$R_{jl} = -\frac{\partial p_j}{\partial x^l} + \frac{\partial \left|\begin{matrix} j \\ j\;l \end{matrix}\right|}{\partial x^j} + \frac{\partial \left|\begin{matrix} l \\ j\;l \end{matrix}\right|}{\partial x^l} + p_j \left|\begin{matrix} j \\ j\,l \end{matrix}\right| + pl \left|\begin{matrix} l \\ j\,l \end{matrix}\right| - \left|\begin{matrix} j \\ j\,l \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} l \\ l\;j \end{matrix}\right| -$$

$$- \left|\begin{matrix} j \\ l\;l \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} l \\ j\;j \end{matrix}\right| - \sum_i \left|\begin{matrix} i \\ i\;j \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} i \\ i\;l \end{matrix}\right|.$$

Ținînd seama de formulele (34''), (34''') se constată că toate cantitățile $R_{jl}(j \neq l)$ sînt nule afară de R_{14}. Avem de exemplu pentru $j = 1$, $l = 2$

$$R_{12} = \frac{B_1}{B}(\operatorname{tg} x^2 - \operatorname{tg} x^2) = 0.$$

În ceea ce privește R_{14} avem formula

$$R_{14} = -\left[\frac{A_1}{A} + \frac{2B_1}{B} + \frac{V_1}{V}\right]_4 + \left(\frac{A_4}{A}\right)_1 + \left(\frac{V_1}{V}\right)_4 + \frac{A_4}{A}p_1 + \frac{V_1}{V}p_4 - 2\frac{A_4}{A}\cdot\frac{V_1}{V} -$$
$$- \frac{A_1A_4}{A^2} - \frac{V_1V_4}{V^2} - \frac{2B_1B_4}{B^2}$$

ceea ce ne dă

$$R_{14} = -\frac{2B_{14}}{B} + \frac{2B_1A_4}{A\,B} + \frac{2V_1B_4}{VB}.$$

Să trecem acum la calculul componentelor R_{ij}. Să calculăm în primul rînd R_{22}. Avem deci

$$R_{22} = -\frac{\partial p_2}{\partial x^2} + \frac{\partial\left|\begin{matrix} i \\ 2\,2\end{matrix}\right|}{\partial x^i} + p_i\left|\begin{matrix} i \\ 2\,2\end{matrix}\right| - \left|\begin{matrix} i \\ 1\,2\end{matrix}\right|^2 - 2\left|\begin{matrix} 2 \\ 2\,i\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix} i \\ 2\,2\end{matrix}\right|.$$

Dar primul termen împreună cu penultimul pentru $i = 3$ ne dă 1, astfel că R_{22} nu depinde de x^2 și este dat de formula

$$R_{22} = 1 - \frac{BB_{11}}{A^2} + \frac{BB_{44}}{V^2} - \frac{B_1^2}{A^2} + \frac{B_4^2}{V^2} + \frac{BA_1B_1}{A^3} + \frac{BA_4B_4}{AV^2} -$$
$$- \frac{BV_1B_1}{VA^2} - \frac{BB_4V_4}{V^3}. \qquad (35')$$

În ceea ce privește R_{33} se găsește formula

$$R_{33} = R_{22}\cos^2 x^2. \qquad (35'')$$

De asemenea calculînd R_{11} și R_{44} obținem formulele

$$R_{11} = -\frac{2B_{11}}{B} - \frac{V_{11}}{V} + \frac{AA_{44}}{V^2} + \frac{2A_1B_1}{AB} + \frac{2AA_4B_4}{BV^2} + \frac{A_1V_1}{AV} - \frac{AA_4V_4}{V^3};$$
$$R_{44} = -\frac{2B_{44}}{B} - \frac{A_{44}}{A} + \frac{VV_{11}}{A^2} + \frac{2B_4V_4}{BV} + \frac{2VV_1B_1}{BA^2} + \frac{A_4V_4}{AV} - \frac{VA_1V_1}{A^3}. \qquad (35''')$$

Avem deci teorema:

Componentele tensorului lui Ricci al formei pătratice (34') *sînt date de formulele* (35), (35'), (35''), (35''').

Ecuațiile gravitaționale. Dacă considerăm ecuațiile gravitaționale (31') relative la metrica (34') rezultă că avem

$$R_{11} + \frac{R}{2}A^2 = -kT_{11},$$
$$R_{22} + \frac{R}{2}B^2 = -kT_{22},$$
$$R_{33} + \frac{R}{2}B^2\cos^2 x^2 = -kT_{33}, \qquad (36)$$
$$R_{44} - \frac{R}{2}V^2 = -kT_{44},$$
$$R_{14} = -kT_{14}, \quad T_{ij} = 0 \quad (i < j,\ i, j \neq 1, 4)$$

unde

$$R = \frac{R_{44}}{V^2} - \frac{R_{11}}{A^2} - \frac{2R_{22}}{B^2}. \qquad (36')$$

Rezultă deci în primul rînd că toate componentele $T_{ij}(i \neq j)$ ale tensorului energie impuls sînt nule, afară eventual de T_{14}.

De asemenea a doua și a treia ecuație (36) ne spune, ținînd seama de (35'') că trebuie să avem

$$T_{33} = T_{22}\cos^2 x^2. \qquad (36'')$$

Rezultă deci teorema:

Pentru ca un tensor energie-impuls T_{ij} să fie compatibil cu o metrică cu simetrie sferică generală, trebuie ca toate componentele T_{ij} $(i \neq j)$ să fie nule afară eventual de T_{14} și să verifice ecuația (36'').

Prin urmare putem lua ca ecuații gravitaționale relative la metrica (34') ecuațiile (36) exceptînd a treia ecuație și ultimele cinci ecuații.

Să observăm acum că dacă calculăm invariantul de curbură, definit de formula (36') cu ajutorul formulelor (35'), (35'''), obținem

$$\frac{R}{2} = \frac{2B_{11}}{A^2B} - \frac{2B_{44}}{BV^2} + \frac{V_{11}}{A^2V} - \frac{A_{44}}{AV^2} + \frac{2V_1B_1}{VA^2B} + \frac{2B_4V_4}{BV^3} +$$
$$+ \frac{A_4V_4}{V^3A} - \frac{2A_4B_4}{ABV^2} - \frac{2A_1B_1}{A^3B} - \frac{A_1V_1}{VA^3} + \frac{B_1^2}{A^2B} - \frac{B_4^2}{B^2V^2} - \frac{1}{B^2}. \qquad (36''')$$

Ținînd seama de această formulă, prima și a patra ecuație (36) se scriu

$$-\frac{2B_{44}}{BV^2}+\frac{2A^2B_4V_4}{BV^3}+\frac{2V_1B_1}{VB}-\frac{A^2}{B^2}+\frac{B_1^2}{B^2}-\frac{A^2B_4}{B^2V^2}=-kT_{11},$$

$$-\frac{2B_{11}V^2}{A^2B}+\frac{2A_1B_1V^2}{A^3B}+\frac{V^2}{B^2}-\frac{V^2B_1^2}{A^2B^2}+\frac{B_4^2}{B^2}=-kT_{44}. \qquad (37)$$

De asemenea a doua ecuație (36) și a cincea se scriu

$$B\left(\frac{B_{11}}{A^2}-\frac{B_{44}}{V^2}\right)+\frac{B^2}{AV}\left(\frac{V_{11}}{V}-\frac{A_{44}}{V}\right)+\frac{B}{A}\left(\frac{V_1B_1}{VA}-\frac{A_1B_1}{A^2}-\frac{A_4B_4}{V^2}\right)+$$

$$+\frac{B}{V}\left(\frac{B_4V_4}{V^2}+\frac{B\,A_4\,V_4}{AV^2}-\frac{BA_1V_1}{A^2V}\right)=-kT_{22}, \qquad (37')$$

$$-\frac{2B_{14}}{B}+\frac{2B_1A_4}{AB}+\frac{2V_1B_4}{VB}=-kT_{11}.$$

Rezultă deci teorema:

Presupunînd tensorul energie-impuls cunoscut determinarea unei metrici cu simetrie sferică generală depinde de integrarea sistemului (37), (37′) *de patru ecuații cu trei necunoscute* A, B, V *de al doilea ordin în două variabile* x^1, x^4.

Pentru integrarea ecuațiilor gravitaționale (37), (37′) să observăm că fiind dată metrica (34′) în care B este o funcție ce depinde de variabila x^1, putem alege în general noi variabile x'^1, x'^4 în așa fel ca B să fie egal cu noua variabilă x'^1. Acest fapt este evident dacă B nu depinde de x^4. Vom presupune deci că B depinde și de x^4. În acest caz să luăm ca variabile noi pe

$$x'^1=B(x^1,\ x^4),\quad x'^4=f(x^1,\ x^4)$$

unde f este o funcție independentă de funcția B, deci avem condiția

$$f_1B_4-f_4B_1\neq 0. \qquad (37'')$$

Să căutăm a determina funcția necunoscută f așa fel ca să avem

$$V'^2(\mathrm{d}x'^4)^2-A'^2(\mathrm{d}x'^1)^2=V^2(\mathrm{d}x^4)^2-A^2(\mathrm{d}x^1)^2,$$

deci în așa fel ca forma pătratică formată din primii doi termeni ai formulei (34′) să continue a fi o diferență de pătrate. Avem atunci formulele

$$V'^2f_4^2-A'^2B_4^2=V^2$$

$$V'^2f_1^2-A'^2B_1^2=-A^2 \qquad (37''')$$

$$V'^2f_1f_4-A'^2B_1B_4=0.$$

Să presupunem acum că funcția f satisface nu numai la condiția (37‴) ci și la condiția

$$f_1B_4+f_4B_1\neq 0. \qquad (38)$$

În acest caz primele două ecuații (37‴) ne dau

$$V'^2=\frac{V^2B_1^2+A^2B_4^2}{B_1^2f^2-f_1^2B_4^2},\qquad A'^2=\frac{V^2f_1^2+A^2f_4^2}{B_1^2f_4^2-f_1^2B_1^2}$$

și deci ultima ecuație (37‴) se scrie

$$B_1B_4[V^2f_1^2+A^2f_4^2]=[V^2B_1^2+A^2B_4^2]f_1f_4.$$

Ori această ecuație are ca soluții

$$\frac{f_4}{f_1}=\frac{V^2}{A^2}\cdot\frac{B_1}{B_4},\qquad \frac{f_4}{f_1}=\frac{B_4}{B_1} \qquad (38')$$

și aceste soluții satisfac condiția (38). În cea ce privește condiția (37″) ea nu este evident suficientă pentru a doua soluție. Pentru prima soluție avem

$$f_1B_4-f_4B_1=\frac{f_1}{A^2B_4}[B_4^2A^2-V^2B_1^2]\neq 0.$$

Ținînd seama că putem schimba semnul uneia dintre variabile, a presupune că această ecuație nu este verificată înseamnă a presupune că avem $B_4A=B_1V$, deci avem formulele

$$A=mB_1,\quad V=mB_4$$

unde m este o funcție oarecare de variabilele x^1, x^4, deci metrica (34′) este de forma

$$\mathrm{d}\sigma^2=m^2[B_4^2(dx^4)^2-B_1^2(\mathrm{d}x^1)^2]-B^2[(dx^2)^2+\cos^2x^2(\mathrm{d}x^3)^2]. \qquad (38'')$$

Avem deci teorema:

Dacă coeficientul B *al formei* (34′) *depinde de* x^1 *și* x^4 *și metrica nu este de forma* (38″), *atunci prin integrarea ecuației liniare și omogene în funcție* f, *dată de prima ecuație* (38′), *putem presupune* $B=x^1$.

Dacă B nu depinde de x^1 însă depinde de x^4, putem presupune printr-o schimbare a variabilei x^4, că avem $B=x^4$.

Rezultă deci că o metrică de forma (34′) se poate reduce la $B=x^1$, sau $B=x^4$ sau $B=1$, sau metrica este de forma (38″). Vom consi-

dera cazul general, deci cazul în care putem presupune $B = x^1$. În acest caz metrica cu simetrie sferică se scrie

$$d\sigma^2 = V^2(dx^4)^2 - A^2(dx^1)^2 - (x^1)^2[(dx^2)^2 + \cos^2 x^2(dx^3)^2] \tag{39}$$

unde V, A sînt funcţii de x^1, x^4.

În acest caz ecuaţiile (37) constituie un sistem de primul ordin în necunoscutele A, V, ca funcţii de variabila x^1, sistem ce se poate scrie sub forma

$$\begin{aligned} 2\frac{V_1}{V} + \frac{1 - A^2}{x^1} &= -kx^1T_{11} \\ \frac{2A_1}{A} + \frac{A^2 - 1}{x^2} &= -k\frac{A^2}{V^2}x^1T_{44} \end{aligned} \tag{39'}$$

În ceea ce priveşte ecuaţiile (37′) ele se scriu

$$\frac{V_{11}}{VA^2} - \frac{A_{44}}{A^2V} - \frac{A_1V_1}{A^3V} + \frac{1}{x^1A^2}\left[\frac{V_1}{V} - \frac{A_1}{A}\right] + \frac{A_4V_4}{AV^3} = -k\frac{T_{22}}{(x^1)^2} \tag{39''}$$

$$A_4 = -kT_{44}x^1A.$$

Ţinînd seama de (39′) putem elimina derivatele A_1, V_1 din prima ecuaţie (39″) precum şi A_{44}. Rezultă astfel că dacă $A_4 \neq 0$, deci $T_{14} \neq 0$ sistemul ecuaţiilor gravitaţionale (39′), (39″) este un sistem cu diferenţiale totale în funcţiile A, V. Avem deci teorema:

Dat fiind tensorul energie-impuls cu $T_{14} \neq 0$, determinarea funcţiilor A, V în metrica (39), depinde de un sistem cu diferenţiale totale.

Rezultă deci că A, V pot conţine cel mult două constante arbitrare şi aceasta are loc numai dacă condiţiile de integrabilitate sînt identic verificate. În general însă funcţiile A, V sînt determinate prin rezolvarea unor ecuaţii algebrice.

Dacă $T_{14} = 0$ atunci $A_4 = 0$, deci A nu depinde de variabila x^4 şi sistemul de ecuaţii gravitaţionale se compune din ecuaţiile (39′) şi din prima ecuaţie (39″), care se scrie

$$\left(\frac{V_1}{V}\right)_1 - \left[\frac{V_1}{V} + \frac{A_1}{A}\right]\frac{V_1}{V} + \frac{1}{x^1}\left[\frac{V_1}{V} - \frac{A_1}{A}\right] = -k\frac{T_{22}}{(x^1)^2}A^2, \tag{39'''}$$

care devine o ecuaţie în termeni finiţi, dacă utilizăm ecuaţiile (39′).

Să presupunem $T_{44} \neq 0$. În acest caz prima ecuaţie (39′) se poate rezolva în raport cu V şi atunci a doua ecuaţie (39′) şi ecuaţia (39‴) constituie două ecuaţii diferenţiale de al doilea şi al treilea ordin în funcţia A, deci problema comportă cel mult două constante arbitrare.

Avem deci teorema:

Dacă tensorul energie-impuls nu satisface condiţiile

$$T_{14} = T_{44} = 0 \tag{39^{IV}}$$

determinarea funcţiilor A, V depinde cel mult de două constante arbitrare.

Să presupunem acum că ecuaţiile (39^{IV}) sînt verificate. În acest caz prima ecuaţie (39′) ne defineşte A prin formula

$$A^2 = \frac{1}{1 - \dfrac{\alpha}{x^1}}$$

unde α este o constantă arbitrară, iar V este definit abstracţie făcînd de o funcţie arbitrară de x^4 multiplicativă. Putem însă particulariza această funcţie printr-o transformare a variabilei x^4. Astfel dacă T_{11} este zero putem lua că

$$V^2 = c^2\left[1 - \frac{\alpha}{x^1}\right]$$

unde c este viteza luminii. Avem deci teorema:

Dacă componentele T_{11}, T_{44}, T_{14} sînt nule, obţinem metrica lui Schwartzschild:

$$ds^2 = c^2\left[1 - \frac{\alpha}{x^1}\right](dx^4)^2 - \frac{(dx^1)^2}{1 - \dfrac{\alpha}{x^1}} - (x^1)^2[(dx^2)^2 + \cos^2 x^2(dx^3)^2]. \tag{40}$$

Ecuaţia (39‴) ne arată că şi $T_{22} = 0$, deci tensorul energie-impuls este zero pentru metrica lui Schwartzschild şi spaţiul este cu tensor Ricci nul.

Se obţine de asemenea o metrică cu tensor Ricci nenul însă proporţional ca tensorul fundamental, deci un spaţiu Einstein luînd

$$V^2 = c^2\left[1 - \frac{\alpha}{x^1} + \gamma(x^1)^2\right], \quad A^2 = \frac{1}{1 - \dfrac{\alpha}{x^1} + \gamma(x^1)^2}$$

unde α, γ sînt constante. În acest caz tensorul energie impuls este definit de formulele

$$\begin{aligned} kT_{11} &= -\frac{3\gamma}{1-\frac{\alpha}{x^1}+\gamma(x^1)^2} \\ kT_{22} &= -3\gamma(x^1)^2 \\ kT_{33} &= -3\gamma(x^1)^2\cos^2 x^2 \\ kT_{44} &= 3\gamma c^2\left[1-\frac{\alpha}{x^1}\right]+\gamma(x^1)^2 \end{aligned} \tag{40'}$$

și deci constantele sînt determinate de tensorul energie-impuls. În acest caz metrica spațiului este definită de formula

$$d\sigma^2 = c^2\left[1-\frac{\alpha}{x^1}+\gamma(x^1)^2\right](dx^4)^2 - \frac{(dx^1)^2}{1-\frac{\alpha}{x^1}+\gamma(x^1)^2} - (x^1)^2[(dx^2)^2 + \cos^2 x^2 (dx^3)^2]. \tag{40''}$$

și această metrică generalizează evident metrica lui Schwartzschild.

Soluții regulate. Să observăm acum că putem numi regulată o metrică cu simetrie sferică (34') cu $B = x^1$, deci o metrică (39), dacă este regulată în orice punct în exteriorul unui cerc cu centrul în origine, x^1 fiind interpretat ca raza vectoare într-un sistem de coordonate polare și dacă la infinit, deci pentru $x^1 \to \infty$, metrica se reduce la metrica lui Minkovsky și prin urmare avem

$$\lim_{x^1\to\infty} V = c, \quad \lim_{x^1\to\infty} A = 1.$$

Metrica (40) are evident această proprietate pentru $x^1 \to \infty$, în timp ce metrica (41) nu are această proprietate deoarece pentru $x^1 \to \infty$, V^2 tinde la infinit.

Să vedem în ce condiții o metrică (34') este regulată, presupunînd V și A funcții analitice în exteriorul unui cerc de rază R deci date de serii de forma

$$\begin{aligned} V^2 &= c^2\left[1+\frac{a_1}{x^1}+\ldots+\frac{a_n}{(x^1)^n}+\ldots\right] \\ A^2 &= 1+\frac{b_1}{x^1}+\ldots+\frac{b_n}{(x^1)^n}+\ldots \end{aligned} \tag{41'}$$

unde a, b depind în general de variabila x^4.

Ținînd seama de aceste formule în ecuațiile (39'), pe care le putem scrie

$$\begin{aligned} (A^2)_1 + \frac{A^2(A^2-1)}{x^1} &= -\frac{A^4 k x^1}{V^2} T_{44} \\ (V^2)_1 + \frac{V^2(A^2-1)}{x^1} &= -kx^1V^2\,T_{11} \end{aligned} \tag{41''}$$

primul membru al primei dintre aceste ecuații se scrie

$$-\frac{b_1}{(x^1)^2}-\frac{2b_2}{(x^1)^3}-\ldots-\frac{nb_n}{(x^1)^{n+1}}\ldots+$$
$$+\frac{1}{(x^1)^2}\left[1+\frac{b_1}{x^1}+\ldots\right]\left[b_1-\ldots+\frac{b_n}{(x^1)^{n-1}}+\ldots\right]$$

deci este cel puțin de ordinul al treilea în $1/x^1$ și coeficientul lui $(1/x^1)^{n+1}$ se scrie pentru $n = 2p$

$$b_n(1-n)+\sum_{s=1}^{p-1} b_{n-s}b_s + b_p^2 \tag{41'''}$$

în timp ce pentru $n = 2p + 1$ lipsește ultimul termen.

Rezultă deci că membrul al doilea al primei ecuații (41'') trebuie să fie cel puțin de ordinul al treilea în $1/x^1$ și cum A^4/V^2 este de ordinul zero urmează că T_{44} trebuie să fie de ordinul al patrulea, deci trebuie să avem

$$T_{44} = \frac{m_4}{(x^1)^4}+\frac{m_5}{(x^1)^5}+\ldots \tag{42}$$

și atunci ecuațiile (41'') ne dau pentru $n = 2$, $n = 3$, ...

$$\begin{aligned} b_2 - b_1^2 &= \frac{1}{c^2}km_4 \\ 2b_3 - 2b_1b_2 &= \frac{k}{c^2}[(2b_2-a_1)m_4+m_5] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{42'}$$

și ne definesc din aproape în aproape b_2, b_3, ..., în funcție de m_i și de b_1, a_1, a_2, ...

În ceea ce privește a doua ecuație (41''), împărțind cu $-c^2$, ea se scrie:

$$\frac{a_1}{(x^1)^2}+\frac{2a_2}{(x^1)^3}+\ldots+\frac{na_n}{(x^1)^{n+1}}+\ldots+\frac{1}{(x^1)^2}\left[b_1+\ldots+\frac{b_n}{(x^1)^{n-1}}+\ldots\right]\cdot$$
$$\cdot\left[1+\frac{a_1}{x^1}+\ldots\right]=\left[1+\frac{a_1}{x^1}+\ldots\right]kx^1T_{11} \tag{42''}$$

deci T_{11} este cel puţin de ordinul al treilea în $1/x^1$, astfel că dacă luăm

$$T_{11} = \frac{n_3}{(x^1)^3} + \frac{n_4}{(x^1)^4} + \ldots \tag{43}$$

avem formulele

$$a_1 + b_1 = kn_3$$

$$2a_2 + b_2 + a_1 b_1 = k(n_4 + a_1 n_3) \tag{43'}$$

. . . .

şi este uşor de văzut că ecuaţiile (42′) şi (43′) definesc din aproape în aproape $b_2, \ldots, b_n, \ldots, a_1, a_2, a_n, \ldots$, dacă b_1, m_i, n_i sînt daţi. În ceea ce priveşte demonstrarea convergenţei seriilor utilizate ea se poate obţine prin metoda funcţiilor majorante. Avem deci teorema:

Ecuaţiile gravitaţionale posedă soluţii de forma (41′), *dacă* T_{44} *şi* T_{11} *sînt date de formulele* (42) *şi* (43) *şi în aceste soluţii* b_1 *este o constantă arbitrară.*

Se poate de asemenea observa că dacă V^2 şi A^2 sînt daţi de formulele (41′) atunci ecuaţiile (39″) definesc T_{22} şi T_{14} ca serii în $1/x^1$ de primul şi al treilea ordin, deci avem

$$T_{22} = \frac{h_1}{x^1} + \ldots, \; T_{14} = \frac{q_3}{(x^1)^3} + \ldots \tag{44}$$

Acest fapt ne arată că tensorul energiei-impuls este nul la infinit, ceea ce corespunde ipotezei că se presupune materia concentrată în origine şi deci, la infinit tensorul energiei-impuls este nul.

Să revenim la metrica (40). Dacă $\alpha = 0$ această metrică este evident de tip Minkovski, deci euclidiană.

Dacă $\alpha \neq 0$ această metrică nu este euclidiană, deci există componente ale tensorului de curbură care nu sînt nule cum este de exemplu

$$R^2_{323} = \frac{c\alpha \cos^2 x^2}{x^1} \tag{44'}$$

şi prin urmare tensorul de curbură nu este nul, deşi tensorul lui Ricci este nul.

În concluzie putem enunţa următoarea teoremă:

Dacă în ecuaţiile gravitaţionale a lui Einstein, membrii ai doilea sînt nuli, deci spaţiul este gol de materie în afara originii şi tensorul lui Ricci este de asemenea nul, metrica spaţiului este metrica lui Schwartschild şi această metrică este euclidiană numai dacă $\alpha = 0$.

Să observăm că metrica (18), (19) pe care am utilizat-o în § 4 pentru a explica curbarea traiectoriilor luminii şi deplasarea periheliului planetei Mercur, este o metrică cu simetrie sferică (39), pentru care $A=1$. Avem deci o metrică cu simetrie sferică pentru care metrica spaţială d este euclidiană şi ecuaţiile (39′) ne dau

$$T_{44} = 0, \; \frac{V_1}{V} = -\frac{R_1}{R} = -\frac{k}{2} x^1 T_{11}, \quad R^2 = 1 + \frac{2a}{c^2 x^1} + \frac{b}{c^2 (x^1)^2}\cdot$$

Deci a doua ecuaţie defineşte T_{11} în funcţie de x^1 şi avem:

$$k x^1 T_{11} = \frac{(R^2)_1}{R^2} = (\log R^2)_1 = -\frac{4}{c^2 (x^1)^3 R^2}\left(a + \frac{b}{x^1}\right)\cdot \tag{44'}$$

De asemenea T_{22} este definit de (39‴), deci avem:

$$\frac{kT_{22}}{(x^1)^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{(R^2)_1}{R^2}\right]_1 + \frac{1}{4}\left[\frac{(R^2)_1}{R^2}\right]^2 + \frac{1}{2x^1}\frac{(R^2)_1}{R^2}\cdot \tag{44''}$$

Avem deci teorema:

Metrica cu simetrie sferică (18), (19) *este caracterizată de faptul că tensorul energie — impuls are ca singure componente nenule* T_{11} *şi* T_{22} *unde* T_{11} *este definit de formulele* (44′), *iar* T_{22} *de formula* (44″).

Această metrică se poate încă scrie:

$$ds^2 = \left[1 - \frac{\alpha}{r}\right](dx^4)^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{\alpha}{r}} - r^2[d\theta^2 + \cos^2\theta \, d\varphi^2], \tag{45}$$

unde α este o constantă. Dacă α este egal cu zero sîntem în cazul unei metrici euclidiene, r fiind atunci raza vectoare obişnuită.

Dacă α este diferit de zero sîntem în prezenţa unei metrici neeuclidiene creată de cîmpul gravitaţional datorit unei singure mase situată în origine şi se poate determina valoarea lui α în funcţie de valoarea masei M concentrată în origine. Ţinînd seama de formula (19′) şi de faptul că avem

$$-\frac{1}{2}c^2 V^2 = -\frac{1}{2}c^2\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) = -\frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}c^2\frac{\alpha}{r}$$

şi că potenţialul creat de masa m se poate scrie:

$$U = \frac{fm}{r},$$

rezultă că avem:

$$\alpha = \frac{2fm}{c^2} \cdot$$

Relativ la metrica lui Schwarzschild vom spune de asemenea că se cunosc formulele de scufundare ale acestei metrici în spații pseudoeuclidiene cu 6 dimensiuni, avînd metrica:

$$ds^2 = dz_1^2 + dz_2^2 - dz_3^2 - dz_4^2 - dz_5^2 - dz_6^2. \tag{46}$$

Considerînd formulele

$$z_1 = k\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\frac{t}{k}, \quad z_2 = k\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\frac{t}{k}$$
$$z_3 = f(r), \quad \left(\frac{df}{dr}\right)^2 = \frac{2mr^3 + m^2k^2}{r^3(r - 2m)} \tag{46'}$$

și presupunînd că z_4, z_5, z_6 sînt dați de formulele (33), se obține un loc geometric cu patru dimensiuni în spațiul E_6 (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) ce posedă o metrică Schwarzschild[1]. O scufundare analogă se obține presupunînd că spațiul pseudoeuclidian are metrica formată dintr-un singur pătrat pozitiv, punînd în formulele (36') sh și ch în loc de sin și cos obișnuit.

Se obține o metrică cu simetrie sferică mai generală decît aceea a lui Schwarzschild, utilizînd și influența potențialului electromagnetic. Această metrică, numită metrica lui Reissner și Weyl, se scrie:

$$ds^2 = c^2V^2dt^2 - \frac{dR^2}{V^2} - R^2[d\theta^2 + \cos^2\theta d\varphi^2] \tag{46''}$$

unde avem:

$$V^2 = 1 - \frac{\alpha}{R} + \frac{\beta^2}{R^2},$$

în care β este o constantă ca și α[2].

Se pot găsi de asemenea soluții în care metrica dl^2 este cu curbura constantă pozitivă, presupunînd că materia este uniform distribuită în univers.

Dacă spațiul V_3 cu metrica

$$dl^2 = a_{ij}dx^idx^j$$

[1] I. Fusitani, M. Ikeda, M. Matsumoto, *Journal of Mathematics of Kito University*, 1961, 1.

[2] Pentru o scufundare a metricei lui Reissner-Weyl în E_6 se poate vedea, S. Janus. Scufundarea metrici Reissner-Weyl, Comunicările Ac. R.P.R. T. XIII, 1963, p. 857–862.

este cu curbură constantă, atunci tensorul lui Ricci R_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ este proporțional cu tensorul a_{ij}, avem deci $R_{ij} = ka_{ij}$. Pe de altă parte, ecuațiile lui Einstein referitoare la metrica

$$ds^2 = V^2(dx^4)^2 - dl^2,$$

unde V nu depinde de x^4, se scriu[1]:

$$R_{ij} + \frac{V_{ij}}{V} - \frac{\Delta_2 V}{V}a_{ij} = -kT_{ij}, \quad R = k\frac{T_{00}}{V^2},$$

unde $R = a^{ij}R_{ij}$ este invariantul lui Ricci relativ la metrica dl^2 și cum avem $R = 3K$, rezultă, dacă presupunem tensorul energetic uniform,

$$T_{00} = V^2\eta, \quad T_{ij} = pa_{ij},$$

în care η și p sînt constante, ceea ce ne dă:

$$3K = k\eta$$

și K trebuie să fie pozitiv, căci η este pozitiv.

Cum spațiile cu curbură constantă pozitivă sînt spații închise ca sfera, deci geodezicile sînt de asemenea curbe închise, așa cum sînt cercurile mari ale sferei, se pun probleme de natură cosmologică relative la volumul spațiului și la cantitatea de materie ce se află în el. Se evaluează că acest volum ar fi $2\pi^2K^{-3/2}$, în timp ce cantitatea de materie ar fi $M = 2\pi^2\eta K^{-3/2}c^{-2}$.

Dacă spațiul fizic este închis sau nu vom spune doar că rămînînd la cazul simplu al relativității restrînse, se poate pune problema de geometrie globală de a găsi spații închise pe care să fie valabilă o geometrie euclidiană cu metrică indefinită, deci de tipul formulei (5'). Desigur că această metrică poate fi realizată în întregime, fie pe cilindrii de diferite tipuri, deci în care una, două sau trei variabile se închid prin translații de o lungime dată, fie pe tor, în care se consideră ca identice punctele ce sînt transformate de patru translații, de exemplu, translațiile unitare pe axele x_0, x, y, z.

Există însă și alte grupuri discrete ce lasă invariantă forma pătratică (5') cum sînt acele în care grupul discret este format de o transformare ortogonală (3) și din translații. Avem patru asemenea grupuri, după cum m are valorile 2, 3, 4, 6, deci patru asemenea spații închise, diferite de tor.

[1] Vezi T. Levi-Civita, *The Absolute Differential Calculus*, London, 1927, p. 426, V. A. Foch, *Teoria spațiului, timpului și gravitației*, Editura Academiei R.P.R., I. S. R. S., București, 1962.

Avem însă şi alte grupuri discrete. Pentru a vedea acest lucru să scriem metrica (5') sub forma:

$$d\sigma^2 = du dv - dy^2 - dz^2, \; (u = x_0 - x, \; v = x_0 + x). \qquad (47)$$

Este uşor de văzut că această metrică rămîne invariantă faţă de transformările grupului discret

$$u' = pu, \; v' = qv, \; y' = y + 1, \; z' = z \; (pq = 1).$$

Se poate arăta atunci că putem asocia acestui grup translaţii unitare pe axele u, v, z, astfel încît să avem un grup discret cu patru generatori, deci în aşa fel ca spaţiul obţinut prin identificarea punctelor echivalente faţă de grup să fie închis, numai dacă $p + q$ este un număr întreg k mai mare decît 2. Rezultă deci că avem o infinitate numărabilă de spaţii închise pe care se poate realiza o geometrie (5'), deci o geometrie Minkowski.

§ 7. FORMA CANONICĂ A ECUAŢIILOR GRAVITAŢIONALE

Să arătăm acum că există un sistem de congruenţe (λ) în care ecuaţiile gravitaţionale (31) se reduc la o formă canonică, ce se obţine reducînd la o formă canonică forma pătratică

$$\Phi = t_{ab} \, ds^a \, ds^b$$

asociată tensorului energie impuls.

Pentru aceasta să arătăm mai întîi că fiind date două forme pătratice[1]

$$\begin{aligned} \varphi &= y_4^2 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 \\ \psi &= b_{ij} y_i y_j \end{aligned} \qquad (48)$$

în patru variabile y_1, y_2, y_3, y_4, putem prin transformări pseudoortogonale, ce păstrează forma canonică a formei φ, să reducem la zero toate cantităţile $b_{ij} (i \neq j)$ afară poate de b_{14}. În adevăr printr-o transformare ortogonală a variabilelor y_1, y_2, y_3 putem să reducem ψ, cum este bine ştiut, ψ la forma

$$\psi = k_4 y_4^2 - k_1 y_1^2 - k_2 y_2^2 - k_3 y_3^2 + 2a_1 y_1 y_4 + 2a_2 y_2 y_4 + 2a_3 y_3 y_4. \qquad (48')$$

Dacă două din cantităţile a_1, a_2, a_3 ar fi nule proprietatea ar fi demonstrată. Dacă una ar fi nulă, deci dacă a_3 ar fi zero, avem o problemă

[1] G. Vranceanu, *Reducerea la formă canonică a unei forme pătratice prin transformări iperbolice* Analele Univ. Parhon, vol. 25, 1960; p. 93-104.

analogă în variabilele y_1, y_2, y_4. Să presupunem deci $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $a_3 \neq 0$ şi să considerăm ecuaţia caracteristică relativă la forma pătratică $\psi - \rho\varphi$ unde ψ este dată de formula (48'). Această ecuaţie se scrie

$$F(\rho) = \begin{vmatrix} \rho - k_1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & \rho - k_2 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & \rho - k_3 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & k_4 - \rho \end{vmatrix} = 0.$$

Rezultă deci că ρ satisface ecuaţia de gradul al patrulea

$$\begin{aligned} F(\rho) = (\rho - k_1)(\rho - k_2)(\rho - k_3)(k_4 - \rho) - a_1^2 (\rho - k_2)(\rho - k_3) - \\ - a_2^2 (\rho - k_1)(\rho - k_3) - a_3^2 (\rho - k_1)(\rho - k_2) = 0. \end{aligned} \qquad (48'')$$

Dacă două dintre numerele k_1, k_2, k_3 ar fi egale de exemplu dacă $k_1 = k_2$ aceasta ecuaţie ar avea ca rădăcină $\rho = k_1$ şi printr-o transformare ortogonală a variabilelor y_1, y_2 putem reduce a_1, la zero, luînd ca una din variabilele y_1, y_2 variabila

$$\frac{a_1 y_1 + a_2 y_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

şi deci problema noastră s-ar reduce la o problemă numai în variabilele y_2, y_3, y_4.

Să presupunem deci k_1, k_2, k_3 diferite. Putem atunci schimbînd eventual indicii 1, 2, 3, între ei să avem

$$k_1 < k_2 < k_3.$$

Rezultă atunci că înlocuind ρ în $F(\rho)$, prin valorile k_1, k_2, k_3 avem

$$\begin{aligned} F(k_1) &= - a_1^2 (k_1 - k_2)(k_1 - k_3) < 0 \\ F(k_2) &= - a_2^2 (k_2 - k_1)(k_2 - k_3) > 0 \\ F(k_3) &= - a_3^2 (k_3 - k_1)(k_3 - k_2) < 0. \end{aligned} \qquad (48''')$$

Aceasta ne arată că ecuaţia $F(\rho) = 0$ are cel puţin două rădăcini reale una între k_1 şi k_2 şi alta între k_2 şi k_3. Fie ρ_1, ρ_2 aceste rădăcini:

Să observăm că direcţia caracteristică asociată la rădăcina ρ_1 este definită de ecuaţiile

$$y_1 = - \frac{a_1}{\rho_1 - k_1} y_4, \; y_2 = - \frac{a_2}{\rho_1 - k_2}, \; y_3 = - \frac{a_3}{\rho_1 - k_3}$$

astfel forma pătratică φ pentru această direcţie, este dată de formula

$$\varphi = y_4^2\left[1 - \frac{a_1^2}{(\rho_1 - k_1)^2} - \frac{a_2^2}{(\rho_1 - k_2)^2} - \frac{a_3^2}{(\rho_1 - k_3)^2}\right], \qquad (49)$$

deci această direcţie este interioară conului $\varphi = 0$, dacă cantitatea din paranteză este negativă. Pentru a arăta aceasta este cazul să observăm că putem scrie ecuaţia (48″) sub forma

$$\frac{F(\rho)}{(\rho-k_1)(\rho-k_2)(\rho-k_3)} = k_n - \rho - \frac{a_1^2}{\rho-k_1} - \frac{a_2^2}{\rho-k_2} - \frac{a_3^2}{\rho-k_3}$$

astfel că derivînd avem pentru $\rho = \rho_1$, ţinînd seama că $F(\rho_1) = 0$,

$$\frac{F'(\rho_1)}{(\rho_1-k_1)(\rho_1-k_2)(\rho_1-k_3)} = -1 + \frac{a_1^2}{(\rho_1-k_1)^2} + \frac{a_2^2}{(\rho_1-k_1)^2} + \frac{a_3^2}{(\rho-k_3)^2}.$$

Ţinînd seama de formulele (48‴) rezultă că funcţia $F(\rho)$ creşte în intervalul (k_1, k_2) deci $F'(\rho_1) > 0$ şi cum $\rho_1 - k_1$ este pozitiv în timp ce $\rho_1 - k_2$ şi $\rho_1 - k_3$ sînt ambii negativi, rezultă că membrul al doilea al acestei relaţii este pozitiv şi deci direcţia caractreristică referitoare la ρ_1 este interioară conului $\varphi = 0$. Aceeaşi proprietate are loc şi pentru direcţia caracteristică referitoare la rădăcina ρ_2. Rezultă astfel că există o transformare pseudo-ortogonală a variabilelor y_1, y_2, y_3, y_4 aşa fel ca direcţiile a două dintre variabilele y_1, y_2, y_3 de exemplu y_2, y_3 să fie direcţii caracteristice relative la ρ_1 şi ρ_2, deci ca ψ să se poată scrie

$$\psi = by_n^2 + ay_1^2 + cy_2^2 + dy_3^2 + 2\lambda y_1 y_4. \qquad (50)$$

Avem deci teorema:

Putem presupune că în formulele (48) *forma* ψ *este definită de formula* (50).

Să observăm acum că putem presupune că variabilele y_1, y_2, y_3, y_4 suferă o transformare de forma

$$y_1' = y_1 \operatorname{ch} \varphi + y_4 \operatorname{sh} \varphi,\ y_2' = y_2$$
$$y_4' = y_1 \operatorname{sh} \varphi + y_4 \operatorname{sh} \varphi,\ y_3' = y_3$$

unde φ este un parametru oarecare şi atunci coeficienţii a, b, λ suferă transformarea

$$\begin{aligned} a' &= a \operatorname{ch}^2 \varphi + 2\lambda \operatorname{ch} \varphi \operatorname{sh} \varphi + b \operatorname{ch}^2 \varphi. \\ \lambda' &= (a+b) \operatorname{ch} \varphi \operatorname{sh} \varphi + \lambda[\operatorname{ch}^2 \varphi + \operatorname{sh}^2 \varphi] \\ b' &= a \operatorname{sh}^2 \varphi + 2\lambda \operatorname{ch} \varphi \operatorname{sh} \varphi + b \operatorname{sh}^2 \varphi. \end{aligned} \qquad (50')$$

Ţinînd seama că avem $\operatorname{ch}^2 \varphi - \operatorname{sh}^2 \varphi = 1$, rezultă că $a - b$ este un invariant astfel că punînd $a - b = 2I$, $m = a - I = b + I$ rezultă formulele

$$\begin{aligned} m' &= \frac{1}{2}(m + \lambda]e^{2\varphi} + \frac{1}{2}(m - \lambda)e^{-2\varphi} \\ \lambda' &= \frac{1}{2}(m + \lambda)e^{2\varphi} - \frac{1}{2}(m - \lambda)e^{-2\varphi} \end{aligned} \qquad (50'')$$

şi prin urmare avem

$$m' + \lambda' = (m + \lambda)e^{2\varphi}, \qquad m' - \lambda' = (m - \lambda)e^{-2\varphi}, \qquad (50''')$$

ceea ce ne spune că $m^2 - \lambda^2$ este de asemenea un invariant. Să observăm acum că ecuaţia caracteristică relativă la forma pătratică $\psi - \rho\varphi$ unde φ este dat de prima formă (48) şi ψ de formula (50) are două rădăcini reale $-c$, $-d$ şi două rădăcini date de ecuaţia

$$\rho^2 + (a-b)\rho + \lambda^2 + ab = 0.$$

Această ecuaţie are deci rădăcini reale, imaginare sau confundate, după cum cantitatea

$$(a+b)^2 - 4\lambda^2 = 4(m^2 - \lambda^2)$$

este pozitivă, negativă sau zero.

Dacă rădăcinile sînt reale şi distincte deci $m^2 > \lambda^2$, atunci putem reduce λ' la zero, alegînd φ în aşa fel încît să avem

$$e^{4\varphi} = \frac{m-\lambda}{m+\lambda} = \frac{m^2 - \lambda^2}{(m+\lambda)^2}$$

şi forma ψ se scrie

$$\psi = by_4^2 + ay_1^2 + by_2^2 + cy_3^2 \qquad (51)$$

unde $b + a \neq 0$.

Dacă rădăcinile sînt imaginare deci $m^2 - \lambda^2 < 0$, atunci putem reduce m' la zero alegînd φ în aşa fel încît să avem

$$e^{4\varphi} = \frac{\lambda - m}{\lambda + m} = \frac{\lambda^2 - m^2}{(\lambda + m)^2}$$

şi forma ψ se scrie

$$\psi = b(y_4^2 - y_1^2) + cy_2^2 + dy_3^2 + 2\lambda y_1 y_4. \qquad (51')$$

Dacă $m^2 - \lambda^2 = 0$ deci avem două rădăcini confundate, atunci trebuie să deosebim două cazuri, după cum avem unul din factori

$m + \lambda$, $m - \lambda$ este diferit de zero sau ambii sînt nuli. Dacă $m - \lambda = 0$ și $m + \lambda = 0$, ecuațiile (50″) ne dau

$$\lambda' = \lambda e^{2\varphi},$$

deci putem reduce λ' la ± 1 și forma ψ se scrie

$$\psi = (I+\varepsilon)y_4^2 + (-I+\varepsilon)y_1^2 + 2\varepsilon y_1 y_4 \quad (\varepsilon = \pm\lambda). \tag{52}$$

Dacă ambii factori sînt nuli deci $m = \lambda = 0$, forma ψ se scrie

$$\psi = b(y_4^2 - y_1^2) + cy_2^2 + dy_3^2 \tag{52'}$$

și coincide cu forma (51) dacă $a = -b$.

Avem deci teorema:

Forma ψ poate fi redusă prin transformări iperbolice la una din formele canonice (51), (51′), (52), *în care cantitățile a, b, c, d, λ, I pot avea orice valori.*

Să utilizăm această teoremă în cazul ecuațiilor gravitaționale, considerînd ca formă ψ, forma pătratică Φ asociată tensorului energie-impuls. În cazul (51), deci în cazul cînd forma Φ se reduce la forma canonică

$$\Phi = t_{44}(ds^4)^2 + t_{11}(ds^1)^2 + t_{22}(ds^2)^2 + t_{33}(ds^3)^2, \tag{52''}$$

ecuațiile gravitaționale (31) pentru indici i, j egali se scriu

$$r_{ii} + \frac{R}{2} = -kt_{ii} \; (i = 1, 2, 3), \; r_{44} - \frac{R}{2} = -kt_{44} \tag{53}$$

în timp ce ecuațiile (31) cu indici i, j distincți se scriu

$$r_{ij} = 0 \qquad (i \neq j). \tag{53'}$$

Rezultă deci că ecuațiile gravitaționale se împart în acest caz în două categorii. Funcțiile (53) ce conțin componente ale tensorului energie-impuls și ecuațiile (53′) ce nu conțin asemenea componente. Vom zice că ecuațiile (53′) sînt de natură geometrică, în timp ce (53) sînt de natură fizică. Rezultă de asemenea că avem cel puțin șase ecuații de natură geometrică. Zicem cel puțin, deoarece dacă ecuația caracteristică referitoare la forma pătratică $\Phi - \rho ds^2$ unde ds^2 este dat de formula (7), are rădăcini multiple, numărul ecuațiilor de natură geometrică crește. Într-adevăr rădăcinile ecuației caracteristice sînt $-t_{11}$, $-t_{22}$, $-t_{33}$, t_{44}. Dacă avem o rădăcină dublă, de exemplu $t_{11} = t_{22}$ ecuațiile (53) ne spun că $r_{11} = r_{22}$, ecuație care

se adaugă deci la ecuațiile (53′), rămînînd numai trei ecuații de natură fizică, de exemplu ecuațiile (53) din care se lasă la o parte ecuația corespunzătoare lui $i = 1$. De asemenea dacă avem o a doua rădăcină dublă $t_{44} = -t_{33}$ rezultă ecuația $r_{44} = -r_{33}$, ce se adaugă la ecuațiile (53′) și rămîn numai două ecuații de natură fizică ecuațiile (53) pentru care $i = 2, 3$. Același lucru dacă am avea o rădăcină triplă. În sfîrșit dacă am avea o rădăcină cuadruplă, deci

$$t_{11} = t_{22} = t_{33} = -t_{44}; \qquad r_{11} = r_{22} = r_{33} = -r_{44}$$

se ajunge la o singură ecuație de natură fizică

$$r_{11} = 2kt_{11}.$$

În sfîrșit toate ecuațiile gravitaționale sînt de natură geometrică, dacă tensorul energie impuls este zero și aceste ecuații ne spun că spațiul V_4 este un spațiu Einstein cu $R = 0$. Să presupunem acum că sîntem în cazul (51′) deci în cazul cînd ecuația caracteristică referitoare la forma $\Phi - \varphi ds^2$ are două rădăcini imaginare, deci Φ este dată de forma canonică

$$\Phi = t_{11}(ds^1)^2 + t_{22}(ds^2)^2 + t_{33}(ds^3)^2 - t_{11}(ds^4)^2 + 2t_{14}ds^1ds^4 \quad (t_{14} \neq 0).$$

În acest caz ecuațiile gravitaționale de natură geometrică se scriu

$$r_{12} = r_{13} = r_{23} = r_{24} = r_{34} = 0, \qquad r_{11} + r_{44} = 0 \tag{54}$$

în timp ce ecuațiile de natură fizică sînt date de ecuațiile

$$r_{14} = -kt_{14}, \quad r_{ii} + \frac{R}{2} = -kt_{ii} \quad (i = 1, 2, 3). \tag{54'}$$

Evident unele dintre aceste ultime ecuații pot trece în rîndul ecuațiilor (54), dacă ecuația caracteristică are o rădăcină dublă ceea ce are loc dacă $t_{22} = t_{33}$ sau dacă $t_{11} = t_{22}$, deoarece atunci avem de asemenea $r_{22} = r_{33}$ sau $r_{11} = r_{22}$. Cum avem $r_{14} \neq 0$ rezultă că în acest caz există cel puțin o ecuație de natură fizică, sau altfel spus, asemenea caz nu este compatibil decît cu un tensor energie-impuls nenul. Să presupunem că sîntem în cazul (52), deci cazul în care Φ este dat de formula canonică

$$\Phi = (-I + \varepsilon)(ds^1)^2 + t_{22}(ds^2)^2 + t_{33}(ds^3)^2 + (I + \varepsilon)(ds^4)^2 + 2\varepsilon ds^1 ds^4$$

$$(\varepsilon = \pm 1)$$

deci avem

$$t_{11} = \varepsilon - I, \qquad t_{44} = \varepsilon + I, \qquad t_{14} = \varepsilon.$$

În acest caz ecuaţiile gravitaţionale de natură fizică se scriu

$$r_{22} + \frac{R}{2} = -kt_{22}, \quad r_{33} + \frac{R}{2} = -kt_{33},$$
$$r_{14} - r_{44} + R = -2kI, \quad r_{11} + r_{44} = -2k\varepsilon, \tag{55}$$

în timp ce ecuaţiile gravitaţionale de natură geometrică se scriu

$$r_{11} + r_{44} + 2r_{14} = 0, \quad r_{12} = r_{13} = r_{23} = r_{24} = r_{34} = 0. \tag{55^1}$$

Vom observa că deşi sîntem în cazul în care ecuaţia caracteristică are o rădăcină dublă, numărul ecuaţiilor de natură fizică (55) este în general patru, totuşi ultima are un caracter special deoarece depind numai de constanta k, ţinînd seama că $\varepsilon = \pm 1$.

Dacă convenim să trecem această ecuaţie în rîndul ecuaţiilor de natură geometrică, putem enunţa următoarea teoremă.

Numărul ecuaţiilor gravitaţionale de natură geometrică este 6, 7, 8, 9 *sau* 10 *după cum ecuaţia caracteristică referitoare la forma pătratică* $\Phi - \rho ds^2$ *are rădăcini distincte, o rădăcină dublă, două rădăcini duble sau o rădăcină triplă, o rădăcină cuadruplă sau tensorul energie-impuls este zero.*

În integrarea ecuaţiilor gravitaţionale este natural să ne ocupăm în primul rînd de ecuaţiile de natură geometrică. Este deci important să cunoaştem metrici pentru care aceste condiţii sînt verificate. Consideraţiile făcute mai sus ne arată că metricile cu simetrie sferică convin cazului cînd forma Φ are forma canonică (52''), deoarece în acest caz ecuaţiile gravitaţionale (53') sînt identic verificate.

În ceea ce priveşte metrica cu simetrie sferică generală se poate conveni celorlalte cazuri, deoarece pentru această metrică rezultă că tensorul lui Ricci în coordonate are proprietatea că toate componentele $R_{ij} (i \neq j)$ sînt nule, afară eventual de R_{14}. Totuşi aceste metrici sînt particulare, deoarece ecuaţia caracteristică are întotdeauna o rădăcină dublă. Altfel, spus, o metrică cu simetrie sferică generală, poate conveni numai unui tensor energie-impuls a cărei ecuaţie caracteristică are o rădăcină reală dublă.

§ 8. TEORII UNITARE

Faptul că teoria relativităţii a reuşit prin criterii geometrice să explice unele fenomene fizice gravitaţionale, care nu puteau fi explicate de mecanica clasică, a făcut să se pună întrebarea dacă nu pot primi o interpretare geometrică şi alte fenomene fizice. Printre

acestea, cele mai importante sînt desigur fenomenele electromagnetice. Pentru aceasta s-a simţit nevoia să se admită că spaţiul fizic este un spaţiu mai general decît un spaţiu riemannian cu patru dimensiuni şi teoriile care caută să dea o explicaţie pe consideraţii geometrice atît a fenomenelor gravitaţionale cît şi a fenomenelor electromagnetice se numesc teorii unitare. Prima teorie unitară a fost creată de Weyl în 1918[1], introducînd spaţiile cu conexiune afină. Aceste spaţii sînt mai generale decît spaţiile lui Riemann în sensul că posedă o familie de curbe invariante, care joacă rolul geodezicilor, însă pot să nu aibă o metrică în sensul lui Riemann. Aceste curbe se scriu sub forma:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt}, \tag{48}$$

în care Γ^i_{jk} sînt funcţii de variabilele $x^1, \ldots, x^n$. Aceste funcţii se numesc componentele conexiunii afine şi cu ajutorul lor se construiesc componentele tensorului de curbură

$$\Gamma^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{sl} \Gamma^s_{jk} - \Gamma^i_{sk} \Gamma^s_{jl}. \tag{48'}$$

Dacă Γ^i_{jk} sînt simetrice în indicii j, k, spaţiul se zice fără torsiune, dacă nu, atunci:

$$T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj} \tag{49}$$

se numesc componentele tensorului de torsiune. Un spaţiu cu conexiune afină A_n are deci în general doi tensori, tensorul de torsiune şi tensorul de curbură.

În fapt, teoria unitară a lui Weyl presupune că spaţiul fizic este cu patru dimensiuni şi că posedă o metrică care nu este aceeaşi pentru tot spaţiul, dar care diferă de la punct la punct cu o unitate de măsură dată de un vector covariant φ_i, deci de o formă Pfaff invariantă

$$d\varphi = \varphi_i dx^i. \tag{50}$$

Această formă este deci un invariant al spaţiului şi se presupune că această formă nu este în general o diferenţială totală exactă, deci că coeficienţii covariantului biliniar

$$\varphi_{ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial x^i} \quad (i, j = 1, 2, 3, 4) \tag{51}$$

---

[1] H. Weyl, *Raum, Zeit, Materie*, Berlin, Springer, 1923.

nu sînt toţi nuli. Presupunînd că metrica spaţiului este dată de formula:

$$ds^2 = e^{\int \varphi_i dx^i} a_{ij} dx^i dx^j, \quad (52)$$

în care x^4 are rolul timpului, iar x^1, x^2, x^3, rolul coordonatelor x, y, z se obţin vectorii magnetic şi electric. Considerînd vectorii avînd componentele

$$M_x = \varphi_{23}, \quad M_y = \varphi_{31}, \quad M_z = \varphi_{12} \quad (52')$$

$$E_x = \varphi_{14}, \quad E_y = \varphi_{24}, \quad E_z = \varphi_{34}$$

ecuaţiile lui Maxwell (7) care definesc legăturile dintre E şi M, capătă astfel o formă invariantă la transformări oarecare variabile.

În 1921, Kaluza şi apoi independent de el Klein propun o altă teorie unitară în care spaţiul fizic se presupune cu cinci dimensiuni avînd ca metrică

$$ds^2 = a_{ij} dx^i dx^j + 2\varphi_i dx^i dx^5 + (dx^5)^2, \quad (i, j = 1, 2, 3, 4), \quad (53)$$

în care a_{ij} şi φ_i depind numai de variabilele x^1, x^2, x^3, x^4 şi în această teorie φ_i este vectorul electromagnetic. S-au dat şi alte teorii unitare, datorite lui Einstein, lui Einstein şi Mayer, Veblen etc. În 1936, autorul acestei cărţi, plecînd de la o teorie unitară a lui Einstein şi Mayer, care urmărea o îmbunătăţire a teoriei lui Kaluza şi Klein, în sensul de a evita cît mai mult presupunerea că spaţiul fizic este cu cinci dimensiuni, ceea ce ar contrazice intuiţia noastră, a construit o teorie unitară neolonomă[1]. În această teorie se presupune că avem în spaţiul cu cinci dimensiuni o ecuaţie a lui Pfaff:

$$ds^5 = dx^5 - \varphi_1 dx^1 - \varphi_2 dx^2 - \varphi_3 dx^3 - \varphi_4 dx^4 = 0, \quad (54)$$

unde $\varphi_1, \ldots, \varphi_4$ este vectorul electromagnetic. Spaţiul V_5 are astfel metrica:

$$ds^2 = a_{ij}\, dx^i\, dx^j + (ds^5)^2, \quad (54')$$

sau, utilizînd congruenţe pseudoortogonale,

$$ds^2 = (ds^4)^2 - (ds^1)^2 - (ds^2)^2 - (ds^3)^2 + (ds^5)^2.$$

Presupunînd $ds^5 = 0$, rezultă că avem de-a face în fiecare punct cu un spaţiu V_4, spaţiul-timp al relativităţii generale. Totalitatea acestor spaţii nu poate fi însă considerată ca formînd spaţiile tangente ale unei hipersuprafeţe în V_5. deoarece se presupune că ecuaţia

[1] G. Vrănceanu, *Sur une théorie unitaire nonholonome des champs physiques*, în „Le Journal de Physique et de Radium", vol. VII, 1936, pp. 514-526.

(44) nu este complet integrabilă, dacă se consideră că tensorul (41) nu este nul, aceasta avînd loc numai dacă cîmpul electromagnetic (42') este nul.

În general, se numeşte spaţiu neolonom riemannian V_n^m, un spaţiu Riemann V_n în care se dă un sistem de ecuaţii cu diferenţiale totale (ecuaţii Pfaff):

$$ds^\alpha = \lambda_i^\alpha\, dx^i = 0 \quad (\alpha = m + 1, \ldots, n),$$

ce nu este complet integrabil. Ca exemplu de o ecuaţie cu diferenţiale totale ce nu este complet integrabilă se poate da ecuaţia:

$$dz - y\, dx = 0. \quad (55)$$

O asemenea ecuaţie nu poate fi scrisă sub forma:

$$df(x, y, t) = 0. \quad (55')$$

deci nu poate fi integrată sub forma:

$$f(x, y, z) = c, \quad (55'')$$

unde c este o constantă. Într-adevăr, dacă (55) şi (55') ar fi echivalente, am avea:

$$df = \rho[dz - ydx], \quad (56)$$

unde ρ este un factor de proporţionalitate.

Avem deci sistemul de ecuaţii cu derivate parţiale:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \rho, \ \frac{\partial f}{\partial x} = -\rho y, \ \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Derivînd însă prima ecuaţie în raport cu y şi ţinînd seama de ultima ecuaţie rezultă că ρ nu depinde de y. În acest caz însă ecuaţia a doua ne spune că f depinde de y, deci f depinde de y dacă $\rho \neq 0$, ceea ce este în contrazicere cu ultima ecuaţie, care spune că f nu depinde de y, prin urmare ecuaţia (56) este imposibilă pentru $\rho \neq 0$, deci (55) nu este o ecuaţie complet integrabilă, înţelegînd prin aceasta că nu este o familie de suprafeţe (55'') a cărei diferenţială egală cu zero să fie ecuaţia (55).

Există însă o infinitate de curbe care satisfac ecuaţia (55), căci punînd:

$$z = \varphi(x), \quad y = \varphi'(x)$$

se obţine o soluţie a ecuaţiei (55) oricare ar fi funcţia $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ fiind derivata în raport cu x a funcţiei φ.

Fiind dat un spaţiu neolonom V_n^m, el posedă un tensor de curbură şi un tensor de torsiune. De asemenea, posedă două familii de curbe invariante, şi anume geodezicile considerate drept curbe de ceea mai scurtă distanţă şi geodezicile considerate drept curbe autoparalele. Şi în teoria unitară neolonomă V_5^4, geodezicile de lungime nulă sînt traiectoriile razelor luminoase, iar geodezicile autoparalele sînt traiectorii ale particulelor încărcate cu electricitate.

S-au propus în continuare teorii unitare în care există două ecuaţii ale lui Pfaff, deci teorii care au la bază un spaţiu neolonom V_6^4.

În una din ultimele teorii unitare propusă de Einstein în 1945 se presupune că spaţiul-timp este cu patru dimensiuni însă cu metrică imaginară, deci avem:

$$a_{jk} = b_{jk} + ic_{jk} \qquad (i = \sqrt{-1}), \tag{57}$$

unde b_{jk} sînt cantităţi simetrice în j, k, în timp ce c_{jk} sînt strîmb simetrice, deci avem:

$$b_{jk} = b_{kj}, \ c_{jk} = - c_{kj}.$$

Cum $c_{jj} = 0$, rezultă că există şase cantităţi c distincte, şi anume:

$$c_{12}, \ c_{13}, \ c_{14}, \ c_{23}, \ c_{24}, \ c_{34}$$

care sînt utilizate pentru a defini cîmpul electromagnetic. În prefaţa ce însoţeşte această teorie unitară, care generalizează şi teoria relativităţii generale, Einstein spune că o teorie unitară ar trebui să aibă două proprietăţi:

1. Cîmpul să apară ca o entitate covariantă unificată. Ca exemplu, Einstein citează unificarea cîmpului electric şi magnetic, în teoria specială a relativităţii. Unificarea constă în acest caz—spune Einstein—în aceea ca întregul cîmp considerat să fie descris de un tensor strîmb simetric şi grupul de bază al transformărilor lui Lorentz să nu ne permită să desfacem acest cîmp — independent de sistemul de coordonate—într-un cîmp electric şi unul magnetic.

2. A doua condiţie pusă de Einstein este ca nici ecuaţiile cîmpului, nici funcţia lagrangeană să nu poată fi exprimate ca sume de mai multe părţi invariante, ci să fie formal entităţi unificate.

,,Teoria pe care o propun — spune el — satisface la condiţia a doua, dar nu şi la prima, căci de fapt b_{jk} şi c_{jk} sînt tensori independenţi de ordinul al doilea, faţă de transformările de variabile reale ale spaţiului''.

După cum a subliniat S. I. Vavilov, fostul preşedinte al Academiei de Ştiinţe a U.R.S.S., teoria unitară a structurii materiei e indispensabilă. În ultimele două decenii, teoriile unitare au evoluat de la teoriile continue spre teorii unitare cuantice, deci spre teorii unitare ale cîmpului material şi ale stării continue a materiei şi ale particulei elementare, care constituie starea discontinuă a materiei. Dacă

teoriile unitare pur continue n-au reuşit să se impună, teoriile unitare cuantice, în strînsă legătură cu experienţa, au înregistrat o serie de succese; între altele, ele verifică ambele criterii einsteiniene de mai sus.

Pe linia acestei dezvoltări, cele mai remarcabile realizări de teorii unitare cuantice sînt: teoria fuziunii cîmpurilor şi particulelor elementare ale lui L. de Broglie (1943), ecuaţia universală neliniară a cîmpurilor şi particulelor a lui W. Heisenberg (1958), anticipată sub o anumită formă în 1958 de D. Ivanenko, şi teoria cuantică conformă neolonomă.

Invarianţa conformă a legilor fizice, deci invarianţa lor faţă de înmulţirea distanţei ds^2 cu un factor arbitrar, funcţie de coordonate, revine la independenţa lor faţă de alegerea unităţilor de măsură. Ea este tot atît de fundamentală ca şi invarianţa lor în raport cu transformările sistemului de coordonate. Ecuaţiile lui Maxwell, ca şi cele mezonice şi spinoriale, sînt invariante faţă de transformări conforme. Teoria conformă a gravitaţiei a fost dezvoltată de Einstein însuşi, apoi de J. Schouten, de R. Ingraham ş.a. Grupul transformărilor conforme relativist-restrînse este legat de mişcarea corpurilor uniform accelerate, în timp ce transformările lui Lorenz sînt legate de mişcarea sistemelor inerţiale, deci de acceleraţie nulă şi constituie un subgrup. A. Popovici şi colaboratorii săi au dezvoltat, începînd din anul 1953, o teorie conformă generală neolonomă şi cuantică a cîmpurilor tensoriale şi spinoriale, pentru mase de repaus oarecare; pentru mase de repaus nule s-a asociat cîmpului electromagnetic şi gravific o varietate neolonomă V_6^4, care pentru mase de repaus nenule se poate reduce la o varietate V_5^4. Din invarianţa conformă a legilor fizice rezultă atunci, sub formă relativist-generală, legea reciprocităţii, care descrie simetria legilor fizice faţă de mărimile canonic conjugate: coordonate-durată şi impulsuri-energie, apoi o lege generalizată a fuziunii particulelor şi cîmpurilor şi ecuaţiile spinoriale neliniare conform invariante, de asemenea, rezultă în aproximaţia relativist restrînsă, pentru cîmpuri gravifice slabe, legea fuziunii lui L. de Broglie şi ecuaţia lui Heisenberg.

Într-adevăr, în virtutea interacţiunii şi transformării reciproce a diverselor cîmpuri şi particule, demonstrată de expierenţă şi dedusă din teoria cuantică a cîmpului, ele nu constituie decît stări, forme de mişcare şi interacţiune sau autoacţiune ale cîmpului spinorial neliniar descris de ecuaţii de tip Dirac-Heisenberg. Fuziunea unui număr par, respectiv impar de cîmpuri fundamentale, dă cîmpuri

[1] A se vedea de asemenea: G. Vrănceanu şi A. Popovici, *Despre problemele de bază ale teoriei relativităţii*, în Lucrările Consfătuirii romîno-sovietice din iunie 1959, Academia R. P. R., Bucureşti, 1960; idem, *Fundamentele teoriei generale a relativităţii*.

şi particule deschise de ecuaţii tensoriale, respectiv spinoriale—fapt care reflectă unitatea materială a lumii, în concordanţă cu materialismul dialectic.

Observaţiile efectuate cu ocazia diferitelor zboruri cosmice au adus o contribuţie importantă în direcţia unei cunoaşteri mai adînci a proprietăţilor spaţiului fizic în care trăim şi fără îndoială că vor conduce la teorii unitare cu rădăcini din ce în ce mai adînci în realitatea fizică.

§ 9. ECUAŢIILE LUI MAXWELL ÎN TEORIILE UNITARE

Am spus mai sus că utilizînd formulele (52′) se poate da ecuaţiilor lui Maxwell o formă invariantă la transformări de coordonate. Pentru a vedea mai de aproape acest lucru[1] să observăm că ecuaţiile lui Maxwell în cazul cînd ne găsim într-un cîmp dielectric omogen fără şarje electrice, se scriu

$$\operatorname{div} M = 0, \quad \operatorname{rot} E = -\frac{1}{c}\frac{\partial M}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} M = \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}, \operatorname{div} E = 0. \tag{58}$$

Ori notînd cu m_x, m_y, m_z componentele lui M şi cu e_x, e_y, e_z componentele lui E pe axele de coordonate x, y, z primele două ecuaţii iau forma

$$\begin{aligned} &\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_z}{\partial z} = 0,\\ &\frac{\partial e_z}{\partial y} - \frac{\partial e_y}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial m_x}{\partial t} = 0,\\ &\frac{\partial e_x}{\partial z} - \frac{\partial e_z}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial m_y}{\partial t} = 0\\ &\frac{\partial e_j}{\partial x} - \frac{\partial e_x}{\partial y} + \frac{1}{c}\frac{\partial m_z}{\partial t} = 0. \end{aligned} \tag{58′}$$

în timp ce ultimile ecuaţii se obţin din acestea schimbînd m cu e şi e cu $-m$.

Dacă utilizăm ecuaţiile (52′), deci dacă luăm

$$\begin{aligned} m_x &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}, \quad m_y = \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}, \quad m_z = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x},\\ e_x &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_4}{\partial x}, \quad e_y = \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_4}{\partial y}, \quad e_z = \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_4}{\partial z} \end{aligned} \tag{59}$$

[1] G. Vrănceanu, Ecuaţiile lui Maxwell în teoria unitară neolonomă, volum original dedicat lui I. Nistor, Cernăuţi, 1937.

unde φ_i este un vector covariant în spaţiul cu patru dimensiuni x^1, x^2, x^3, x^4 şi avem

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^4 = t. \tag{59′}$$

Ecuaţiile (59′) se pot scrie

$$\frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial \varphi_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial \varphi_{ki}}{\partial x^j} = 0, \quad \varphi_{ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial x^i} (i, j, k = 1, 2, 3, 4) \tag{60}$$

unde i, j, k sînt trei indici distincţi. Într-adevăr dacă dăm indicilor i, j, k valorile 1, 2, 3 se obţine prima ecuaţie (58′) dacă dăm indicilor i, j, k valorile 2, 3, 4 avem

$$\frac{\partial \varphi_{23}}{\partial x^4} + \frac{\partial \varphi_{34}}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi_{42}}{\partial x_{33}} = 0$$

care coincide cu a doua ecuaţie (58′). În mod analog se poate vedea că a treia şi a patra ecuaţie (58′) sînt date de (60), respectiv cînd punem $i = 3$, $j = 1$, $k = 4$ şi $i = 3$, $j = 2$, $k = 4$.

Rezultă deci că ţinînd seama de (59′), ecuaţiile (58′) sînt echivalente cu ecuaţiile (60). Pe de altă parte ecuaţiile (60) reprezintă condiţia necesară şi suficientă ca componentele φ_{ij}, ale unui tensor strîmb simetric să fie componentele tensorului asociat vectorului φ_i. Rezultă deci că ecuaţiile (60) au o formă invariantă la o transformare de variabile.

Să vedem cum putem da o formă invariantă ultimelor ecuaţii (58) ecuaţii ce se obţin, cum am observat din (58′), schimbînd e în m şi m în e. Dar să observăm că tensorul φ_{ij} are drept componente mixte

$$\varphi^i_j = \varepsilon_i \, \varphi_{ij}$$

unde avem

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1, \quad \varepsilon_4 = 1$$

cantităţile ε_i reprezentînd coeficienţii nenuli ai metricei pseudoeuclidiene

$$ds^2 = -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + (dx^4)^2$$

care conduce, ţinînd seama de (59′), la metrica lui Minkovsky. Ori fiind dat tensorul mixt φ^i_j se poate forma divergenţa acestui tensor

$$D_j = \frac{\partial \varphi^i_j}{\partial x^i}$$

şi ultimele ecuaţii (58) ne spun că această divergenţă este nulă, deci că avem

$$\frac{\partial \varphi^i_j}{\partial x^i} = 0. \tag{62}$$

Într-adevăr dacă presupunem $j = i$, avem

$$\varphi_1^1 = 0, \quad \varphi_1^2 = \varphi_{12}, \quad \varphi_1^3 = \varphi_{13}, \quad \varphi_1^4 = -\varphi_{14}.$$

Rezultă deci

$$D_1 = \frac{\partial \varphi_1^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi_1^3}{\partial x^3} + \frac{\partial \varphi_1^4}{\partial x^4} = \frac{\partial m_z}{\partial y} - \frac{\partial m_y}{\partial z} - \frac{1}{e} \cdot \frac{\partial e_x}{\partial z} = 0$$

care reprezintă a doua ecuație (58′) în care însă e a luat locul lui m și $-m$ locul lui e. În mod analog se arată identitatea cu celelalte ecuații (58).

Avem deci teorema:

Fiind dat un vector covariant φ_i *în spațiul pseudo-euclidian E cu metrica* (61) *luînd ca vectori m, e aceia dat de formulele* (59), *ecuațiile lui Maxwell sînt echivalente cu ecuațiile* (60) *și* (62).

Să presupunem acum că luăm un alt sistem de variabile

$$x^{1i} = x^{1i}(x^1, x^2, x^3, x^4). \qquad (62')$$

Dacă în aceste variabile metrica (61) se conservă, ecuațiile lui Maxwell rămîn invariante, ceea ce arată că ecuațiile lui Maxwell sînt invariante la transformări Lorentz. Dacă transformarea (62′) nu conservă forma canonică (61) atunci ecuațiile (60) continuă să-și păstreze forma, în timp ce (62) nu mai au un caracter invariant.

Să presupunem că sîntem într-un spațiu cu patru dimensiuni cu o metrică cu un tensor fundamental a_{ij}. În acest caz componentele tensorului mixt φ_j^i sînt date de formulele

$$\varphi_j^i = a^{is} \varphi_{sj}$$

unde a^{is} sînt reciprocii determinantului $|a_{ij}|$, iar divergența D_j este dată de formulele

$$D_j = \varphi_{j,i}^i = a^{is} \ \varphi_{sj,i}$$

unde i reprezintă derivata covariantă în raport cu tensorul a_{ij}. Avem deci formulele

$$\varphi_{sj,i} = \frac{\partial \varphi_{sj}}{\partial x^i} - \left|\begin{matrix} k \\ si \end{matrix}\right| \varphi_{kj} - \left|\begin{matrix} k \\ ji \end{matrix}\right| \varphi_{ks}$$

unde $\left|\begin{matrix} k \\ ji \end{matrix}\right|$ sînt simbolurile lui Christoffel de a doua speță relativ la tensorul a_{ij}. A spune deci că $D_j=0$ revine deci a considera ecuațiile

$$\varphi_{j,i}^i = a^{is} \frac{\partial \varphi_{sj}}{\partial x^i} - \left|\begin{matrix} j \\ si \end{matrix}\right| \varphi_{kj} a^{si} - \left|\begin{matrix} k \\ k \end{matrix}\right| \varphi_k^i.$$

Rezultă deci teorema:

Fiind dat un spațiu V_4 *oarecare dacă luăm vectorii e, m definiți de formulele* (59), *atunci ecuațiile lui Maxwell în spațiul* V_4 *sînt date de ecuațiile* (63).

CUPRINS

Redactor responsabil: LINA TICOŞ
Tehnoredactor: BETTY NEGREANU

Dat la cules: 24. 07. 1967. Bun de tipar: 07. 12. 1967. Apărut: 1967. Tiraj: 4000+140 broşate. Hîrtie: tipar înalt tip B de 63 g/m², 610×860/16. Coli editoriale: 21,18. Coli de tipar: 21. A: 6111/1967. C. Z. pentru bibliotecile mari: 513:530.12. C. Z. pentru bibliotecile mici: 513.

Tiparul executat sub comanda nr. 577/1967, la Întreprinderea Poligrafică Cuj, str. Brassai nr. 5—7, Cluj — Republica Socialistă România.